**Γ / ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

# ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

# ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- ***ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ***
- ***ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ***
- ***ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ***
- ***ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ***
- ***ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ***

**Δημήτρης Αργυράκης** **Γεράσιμος Θ. Κουτσανδρέας**

# ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1Ο

## ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

# Ι. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- ***ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ***
- ***ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ***
- ***ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ***

# Κεφάλαιο 1ο

# Ι. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

## Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό – Λάθος»

**1.** Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$.
Αν $x_1 = x_2$, τότε και $f(x_1) = f(x_2)$. **Σ Λ**

**2.** Για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x,\ x > 0$, ισχύει
$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y > 0$. **Σ Λ**

**3.** Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x,\ x \in R$, ισχύει
$f(x + y) = f(x)\, f(y)$ για κάθε $x, y \in R$. **Σ Λ**

**4.** Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x,\ x \in R$, ισχύει
$f(x + y) = f(x)\, f(y)$ για κάθε $x, y \in R$. **Σ Λ**

**5.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ βρίσκεται
κάτω από τον άξονα x΄x. **Σ Λ**

**6.** Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$. Οι τετμημένες των σημείων τομής της $C_f$ με τον άξονα x΄x μπορούν να βρεθούν, αν θέσουμε όπου $y = 0$ και λύσουμε την εξίσωση. **Σ Λ**

**7.** Δυο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, αν υπάρχουν κάποια $x \in R$, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x)$. **Σ Λ**

**8.** Για να ορίζονται το άθροισμα και το γινόμενο δύο συναρτήσεων f και g θα πρέπει τα πεδία ορισμού τους να έχουν κοινά στοιχεία. **Σ Λ**

**9.** Αν η συνάρτηση f είναι 1- 1, οι συναρτήσεις g, h έχουν πεδίο ορισμού το R και ισχύει $f\left(g(x)\right) = f\left(h(x)\right)$ για κάθε $x \in R$, τότε οι συναρτήσεις g και h είναι ίσες. **Σ Λ**

**10.** Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x},\ x \neq 0$, είναι σταθερή. **Σ Λ**

**11.** Αν το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (α,β), τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο. **Σ Λ**

**12.** Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R, είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R. **Σ Λ**

**13.** Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ. Αν ο λόγος $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ είναι θετικός για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 \neq x_2$, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **Σ Λ**

**14.** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ. **Σ Λ**

**15.** Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. **Σ Λ**

**16.** Αν μια περιττή συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x_0$, τότε θα παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $-x_0$. **Σ Λ**

**17.** Αν μια άρτια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0$, τότε παρουσιάζει το ίδιο είδος ακρότατου στο σημείο $-x_0$. **Σ Λ**

**18.** Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε είναι 1 - 1. **Σ Λ**

**19.** Αν μια συνάρτηση f είναι 1 - 1, τότε είναι πάντοτε περιττή. **Σ Λ**

**20.** Η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$, $\nu \in N^*$ είναι:

**i.** Άρτια, αν ο ν είναι άρτιος **Σ Λ**

**ii.** Περιττή, αν ο ν είναι περιττός. **Σ Λ**

**21.** Αν η συνάρτηση f είναι 1 - 1, τότε ισχύουν:

**i.** $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε x που ανήκει στο σύνολο τιμών της f **Σ Λ**

**ii.** $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in D_f$.

**22.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$. Τότε κάθε κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των $C_f$ και $C_f^{-1}$ ανήκει στην ευθεία $y = x$. **Σ Λ**

**23.** Αν μια συνάρτηση είναι άρτια, τότε υπάρχει η αντίστροφή της. **Σ Λ**

**24.** Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το R τότε ισχύει:

**i.** $fog = f \cdot g$ **Σ Λ**

**ii.** $fog = gof$ **Σ Λ**

**25.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και μια συνάρτηση h, για την οποία ισχύει h(x) = x, για κάθε $x \in R$. Τότε ισχύει: (hof) (x) = (foh) (x) , για κάθε $x \in R$. **Σ Λ**

**26.** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες στο R, τότε η συνάρτηση gof είναι:

**i.** γνησίως αύξουσα , αν οι f , g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας **Σ Λ**

**ii.** γνησίως φθίνουσα,αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας. **Σ Λ**

**27.** Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ με f (x) < 0 για κάθε $x \in \Delta$,τότε η συνάρτηση $f^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ. **Σ Λ**

**28.** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι 1 - 1 στο R, τότε και η συνάρτηση gof είναι 1 - 1 στο R. **Σ Λ**

### *ΣΧΟΛΙΟ:*

Αν η σύνθεση της g με την f , δηλαδή η fog είναι 1-1 τότε:

1. Η g είναι απαραιτήτως 1-1.
2. Η f δεν είναι απαραιτήτως 1-1.

**Απόδειξη**

**1.** Έστω $x_1, x_2 \in A_g$ με $g(x_1) = g(x_2)$ . Επειδή η f είναι συνάρτηση και ορίζεται η fog , έπεται ότι $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ και επειδή η fog είναι 1-1 προκύπτει $x_1=x_2$. Άρα η g είναι 1-1.

**2.** Έστω $x_1 , x_2 \in A_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Αν υπάρχουν $\omega_1 , \omega_2 \in A_g$ τέτοια ώστε $g(\omega_1) = x_1$ και $g(\omega_2) = x_2$, προκύπτει $f(g(\omega_1)) = f(g(\omega_2))$ και επειδή η fog είναι 1-1 προκύπτει $\omega_1 = \omega_2$. Άρα $g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2)$ και επειδή η $g^{-1}$ είναι 1-1 προκύπτει $x_1 = x_2$ δηλαδή η f είναι 1-1. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 Αν υπάρχουν $\omega_1, \omega_2 \in A_g$ τα έτοια ώστε $g(\omega_1) = x_1$ και $g(\omega_2) = x_2$ (δηλαδή εξαρτάται από το σύνολο τιμών της g).

Θεωρείστε ως αντιπαράδειγμα, τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$ κ.λπ.

.

# Ασκήσεις για λύση

**1.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

**α.** Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f(2)$

**β.** Να βρείτε τα σημεία τομής της $C_f$ με τους άξονες

**γ.** Να βρείτε τις τιμές $f(t)$, $f(xt)$, $f(x+h)$, $x, t, h \in R$.

**2.** Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

**α.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{(x-1)\cdot\sqrt{x+1}}$

**β.** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-2} - 1} + \dfrac{3}{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}$

**γ.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - x^2}}{|x - 2| - 1} + \dfrac{1}{|3x-4| - |x|}$

**δ.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln x}{1 - \ln x}}$

**ε.** $f(x) = \log(x^2 + x - 2) + \log\dfrac{x+3}{3-x}$

**στ.** $f(x) = \dfrac{\text{συν}x}{2\text{ημ}x - 1} + \dfrac{1}{\text{εφ}x - 1}$, $x \in [0, 2\pi]$

**ζ.** $f(x) = \sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x}$

**η.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

**θ.** $f(x) = \sqrt{2\text{συν}x - 1}$

**ι.** $f(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$

**κ.** $f(x) = \ln(x-1) + \dfrac{1}{x^2 - 4}$

**3.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$.

**α.** Να εξετάσετε ποιες από τις συναρτήσεις του παρακάτω πίνακα είναι ίσες με τη συνάρτηση f.

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ | $f_2(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$ | $f_3(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$ |
| $f_4(x) = x\cdot(\dfrac{1}{x} + 1)$ | $f_5(x) = \ln e^{x+1}$ | $f_6(x) = e^{\ln(x+1)}$ |

**β.** Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

**4.** Δίνονται οι συναρτήσεις

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ | $f_2(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ | $f_3(x)=\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$ |
| $f_4(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}}$ | $f_5(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $f_6(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}}$ |

**α.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού καθεμιάς συνάρτησης.

**β.** Να εξετάσετε αν υπάρχουν ζεύγη ίσων συναρτήσεων.

**γ.** Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

**5.** **i.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ , $g(x)=\dfrac{2x^2+2\alpha x+\alpha}{2(x^2-1)}$ , $\alpha\in R$ .

**α.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g.

**β.** Για ποια τιμή του α ισχύει $f=g$ , στο ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R;

**ii.** Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό α ώστε οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{2\alpha^2x+\alpha}{x+1-\alpha} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{(3\alpha-1)\cdot x+\alpha}{x+\alpha}$$ να είναι ίσες .

**6.** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 2\\ \sqrt{x}, & x>2\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x<3\\ -2x+3, & x\ge 3\end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

**α.** $f+g$ **β.** $f\cdot g$ **γ.** $\dfrac{f}{g}$

**7.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\dfrac{1-x}{1+x}$.

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

**β.** Να αποδείξετε ότι $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$ για κάθε $x_1$, $x_2$ του πεδίου ορισμού της.

**8.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\frac{1}{\ln x}}$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

**β.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = e$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

**γ.** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

**9.** Να βρείτε τις συναρτήσεις gof και fog όταν:

**α.** $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = x + 2$

**β.** $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x-4}$

**γ.** $f(x) = \sqrt{5-x}$ και $g(x) = \ln(x-5)$

**δ.** $f(x) = 2x + 4$ και $g(x) = \begin{cases} x-2 & , \text{ αν } x < -2 \\ 2x & , \text{ αν } x^3 \geq 2 \end{cases}$

**10.** Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [0, 1]. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

**α.** $h_1 = f(x^2)$ **β.** $h_2 = f(x - 4)$ **γ.** $h_3 = f(\ln x)$ **δ.** $h_4(x) = f(ημx)$

**11.** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R είναι περιττή. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β] με α, β > 0, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα [–β, –α].

**12.** Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ, οι οποίες παίρνουν θετικές τιμές για κάθε $x \in Δ$ και οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες στο Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

**13.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο R, οι οποίες είναι γνησίως μονότονες και έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας (είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες).

**α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

**β.** Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων fof και gog.

**γ.** Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \ln[\ln(x)]$, $x > 1$.

**14.** Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) + f(y)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x , y. Να αποδείξετε ότι:

**α.** $f(0) = 0$

**β.** Η f είναι περιττή.

**γ.** $f(κx) = κf(x)$, για κάθε φυσικό αριθμό $κ \neq 0$.

**15.** Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(1-x^2)$ με $A_f = (-3, 1)$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**16.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(2x+1) = 4x^2 + 2$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, να βρείτε τον τύπος της .

**17.** Αν $f(x) = 1 + e^x$ και $(gof)(x) = x + e^{1-x}$ , να προσδιορίσετε τη συνάρτηση g .

**18.** Να βρείτε μια συνάρτηση f, ώστε να ισχύει $(gof)(x) = |συνx|$, $x \in R$

και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

**19.** Αν $f(x) = 2x^2 - 1$ και $(fog)(x) = συν2x$, να αποδείξετε ότι ένας τύπος της g είναι ο $g(x) = |συνx|$.

**20.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{10 - αx}{5 - 2x}$. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει

$(fof)(x) = x$, για κάθε πραγματικό αριθμό x , τότε είναι $α = 5$.

**21.** Αν $g(x) = x + 3$ και $f(g(x)) = 3x + 2$ , να αποδείξετε ότι $f(x) = 3x - 7$ .

**22.** Θεωρούμε τη συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το R για την οποία ισχύουν $f(f(x) = 4x + 3$ και $f(f(f(x))) = 8x + 7$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x + 1$ .

**23.** Για τη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to R$ ισχύει $f(e^x) = 2x + 1$. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος θετικών αριθμών α, β ισχύει $f(αβ) = 2\ln α + 2\ln β + 1$.

**24.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x^2 - 4x+1$ και $g(x) = \dfrac{1}{2} - \sqrt{-x}$ . Να

αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της gof είναι σημείο .

**25.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2 + x - 4$ και $g(x) = 3\sqrt{x} - x$. Να αποδείξετε ότι δεν ορίζεται η $g \circ f$ .

**26.** Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = x^x$ , $x > 0$ , ως σύνθεση δύο συναρτήσεων

**27.** Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [2 , 8]. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x+8) - f(9 - x^2)$ .

**28.** Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R , που είναι γνησίως αύξουσα και $f(2) = 3$ .

**i.** Να λύσετε ως προς α την εξίσωση $f\left(α + \dfrac{1}{α}\right) = 3$.

**ii.** Να λύσετε ως προς α την ανίσωση $f\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) > 3$.

**iii.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{f(x) - 3}$ .

**29.** Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2f(x) - (fof)(x) + 2006$ , $x \in R$.

**i.** Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα .

**ii.** Να λυθεί η ανίσωση $2[f(x^2) - f(1)] > (fof)(x^2) - (fof)(1)$ .

**30.** Δίνονται οι συναρτήσεις f , g με πεδίο ορισμού το R για τις οποίες είναι

$(fog)(x) = x + 1$ , για κάθε πραγματικό αριθμό x .

**i.** Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1 .

**ii.** Να λύσετε την εξίσωση $g(4^x - 2^{x+1} + 4) = g(2^{x+2} - 4)$

**31.** Να εξετάσετε ως προς το 1-1 και βρείτε την αντίστροφη των συναρτήσεων

**i.** $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

**ii.** $g(x) = \ln\sqrt{x} + 1$

**iii.** $h(x) = 5 + \sqrt{x - 2}$

**iv.** $k(x) = \dfrac{2x}{1 - x}$

**v.** $\varphi(x) = \ln\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

**vi.** $f(x) = 2 + (x - 2)^2$ με $x \geq 2$.

**vii.** $f(x) = x^3$.

**32. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**

Αν η συνάρτηση δίνεται με πολλαπλό τύπο , χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στη μελέτη του 1-1. **Δεν** αρκεί να εξετάσουμε μόνον κάθε κλάδο χωριστά. Για να είναι 1-1 πρέπει να αποκλείσουμε ότι για διαφορετικά x προκύπτουν ίδιες τιμές για τη συνάρτηση. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει τα επιμέρους σύνολα τιμών των κλάδων της συνάρτησης να είναι ξένα μεταξύ τους.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**1.** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x-3 & , \ x\geq 0\\ -x+5 & , \ x<0\end{cases}$ δεν είναι 1-1.

**2.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{|x|+1}$.

**α.** Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1.

**β.** Να βρείτε την $f^{-1}$.

**33.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και $h(x)=\dfrac{1}{x+2}$ με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta=(0,+\infty)$.

**Α.** **α.** Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε $fog=h$.

**β.** Να βρείτε μια συνάρτηση φ ώστε $\varphi of=h$.

**Β.** **α.** Να βρείτε τις $f^{-1}$, $g^{-1}$, $h^{-1}$ (αντίστροφες των f, g, h).

**β.** Να βρείτε τις $f^{-1}og^{-1}$ και $g^{-1}of^{-1}$.

**γ.** Να εξετάσετε αν $g^{-1}of^{-1}=h^{-1}$ (δικαιολογήστε την απάντησή σας).

**34.** Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(f(x))+f^3(x)=2x+3$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

**Α.** Αποδείξτε ότι:

**i.** Η f είναι συνάρτηση 1-1.

**ii.** Ισχύει $2f^{-1}(x)=f(x)+x^3-3$

**Β.** Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3+x)=f(4-x)$.

**35.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+8x-8$ .

**i.** Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

**ii.** Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x))<1$.

**iii.** Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι η αντίστροφή της έχει το ίδιο μονοτονίας.

**iv.** Αποδείξτε ότι $f^{-1}(-8)=0$.

**v.** Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)<1$ .

**36.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1$.

**i.** Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται.

**ii.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f$ και $C_{f^{-1}}$ .

***ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:*** Βλέπε παρατήρηση 12 σελ. 42.

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

## Κεφάλαιο 1ο
## I. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό – Λάθος»

| | |
|---|---|
| **1.** | **Σ** |
| **2.** | **Σ** |
| **3.** | **Σ** |
| **4.** | **Λ** |
| **5.** | **Σ** |
| **6.** | **Λ** |
| **7.** | **Σ** |
| **8.** | **Σ** |
| **9.** | **Λ** |
| **10.** | **Σ** |

| | |
|---|---|
| **11.** | **Σ** |
| **12.** | **Σ** |
| **13.** | **Σ** |
| **14.** | **Λ** |
| **15.** | **Σ** |
| **16.** | **Σ** |
| **17.** | **Λ** |
| **18.** | **Λ** |
| **19. i)** | **Σ** |
| **19. ii)** | **Σ** |

| | |
|---|---|
| **20. i)** | **Σ** |
| **20. ii)** | **Σ** |
| **21.** | **Σ** |
| **22.** | **Λ** |
| **23. i)** | **Λ** |
| **23. ii)** | **Λ** |
| **24.** | **Σ** |
| **25. i)** | **Σ** |
| **25. ii)** | **Σ** |
| **26.** | **Σ** |
| **27.** | **Σ** |

### Απαντήσεις - υποδείξεις στις ασκήσεις

**2.** **α.** $(-1,\ 1)\cup(1,\ 2]$, **β.** $(2,\ 3)\cup(3,\ 4]$, **γ.** $[0,\ 1)$, **δ.** $[1, e)$, **ε.** $(-3,\ -2)\cup(1,\ 3)$

**στ.** $x \neq \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, **ζ.** $(0, e]$, **η.** $(-\infty, -1)\cup[1, +\infty)$,

**θ.** $\{2\kappa\pi - \pi/3 \leq x \leq 2\kappa\pi + \pi/3\}$, $\kappa \in Z$. **ι.** $(-\infty, 0]$, **κ.** $(1, 2) \cup (2, +\infty)$.

**3.** **α.** $f_2$, $f_5$

**β.** $(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

**4.** **α.** $D_1 = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ $D_2 = [1, +\infty)$ $D_3 = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$

$D_4 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ $D_5 = D_4$ $D_6 = (1, +\infty)$

**β.** $f_1 = f_3$

**γ.** $D = (1, +\infty)$.Στοδιάστημααυτό όλες οι συναρτήσεις έχουν τύπο $f(x) = f_2(x)$.

**5.** **i.** **α.** $D_f = R - \{1\}$, $D_g = R - \{-1, 1\}$

**β.** Θα πρέπει ο αριθμητής της g να έχει παράγοντα το $x + 1$, άρα $\alpha = 2$, επομένως αν $\alpha = 2$ είναι $f = g$ για κάθε $x \in R - \{-1, 1\}$.

**ii.** $\alpha = 1/2$

**6.** Πεδίο ορισμού του αθροίσματος είναι το διάστημα $(0, +\infty)$ και ο τύπος είναι:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} \ell nx + 2x + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x} + \ell nx, & 2 < x < 3 \\ \sqrt{x} - 2x + 3, & x \geq 3 \end{cases}$$

Ομοίως εργαζόμαστε και για τις $f\cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$

**7.** **α.** Πρέπει $(1-x)(1+x)>0$, άρα $D_f=(-1,1)$

**β.** Καταρχήν αποδεικνύουμε ότι το $\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\in(-1,1)$ ως εξής:

Αν $|x_1|<1$ και $|x_2|<1$ τότε και $\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}<1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2<(1+x_1x_2)^2 \Leftrightarrow \ldots$

Στη συνέχεια έχουμε: $f(x_1)+f(x_2)=\log\left(\dfrac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\dfrac{1-x_2}{1+x_2}\right)$ και

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)=\log\left(\frac{1-\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}{1+\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}\right)=\ldots=\log\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)}$$

**8.** **α.** $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$ **β.** $y=x^{\frac{1}{\ell nx}} \Leftrightarrow \ell ny=\dfrac{1}{\ell nx}\cdot\ell nx=1 \Leftrightarrow y=e$

**9.** **α.** $A_{gof}=[3,+\infty)$, $(gof)(x)=\sqrt{x-3}+2$ , $A_{fog}=[1,+\infty)$, $(fog)(x)=\sqrt{x-1}$

**β.** Δεν ορίζεται η συνάρτηση gof , $A_{fog}=[4,\ 5]$, $(fog)(x)=\sqrt{5-x}$

**γ.** $A_{gof}=(-\infty,-20)$, $(gof)(x)=\ln(\sqrt{5-x}-5)$ ,

$A_{fog}=(5,5+e^5]$ , $(fog)(x)=\sqrt{5-\ln(x-5)}$

**δ.** $(fog)(x)=\begin{cases}2x & ,\ \text{αν}\ x<-2\\ 4x+4 & ,\ \text{αν}\ x\geq -2\end{cases}$ , $(gof)(x)\begin{cases}2x+2 & ,\ x<-3\\ 4x+8 & ,\ x\geq -3\end{cases}$

**10.** **α.** $[-1,1]$ , **β.** $[4,5]$ , **γ.** $[1,e]$ , **γ.** $2\kappa\pi\leq x\leq 2\kappa\pi+\pi$ , $\kappa\in Z$ .

**11.** Αν $-\beta\leq x_1<x_2\leq -\alpha$, τότε $\alpha\leq -x_2<-x_1\leq\beta$ με $f(-x_2)<f(-x_1)$
$-f(x_2)<-f(x_1)$, άρα $f(x_2)>f(x_1)$

**12.** Αν $x_1<x_2$, τότε $f(x_1)<f(x_2)$, άρα $\dfrac{1}{f(x_1)}>\dfrac{1}{f(x_2)}$. Όμοια για την g.

Επομένως $\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{g(x_1)}>\dfrac{1}{f(x_2)}+\dfrac{1}{g(x_2)}$

**13.** **α.** Αν f, g γνησίως αύξουσες στο R, τότε αν $x_1<x_2 \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow$
$f(g(x_1))<f(g(x_2)$, άρα fog γνησίως αύξουσα. Ομοίως αν f, g γνησίως φθίνουσες

**β.** Επειδή η f έχει την ίδια μονοτονία με την f από το (α) … κ.λ.π.

**γ.** Η $f(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα από το (β) … κ.λ.π.

**15.** $(-2, 0) \cup (0, 2)$

**16.** $f(x) = x^2-2x+3$ , $x \in R$ .

**17.** $g(x) = \ln(x-1) + \dfrac{e}{x-1}$ , $x \in (1,+\infty)$.

**18.** Μία συνάρτηση f είναι η $f(x) = ημx$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :**

Η παραπάνω συνάρτηση δεν είναι η μοναδική αφού και οι συναρτήσεις

$f(x) = -ημx$ , ή $f(x) = |ημx|$ , $f(x) = \begin{cases} ημx, & x > 0 \\ -ημx, & x \le 0 \end{cases}$ κ.λ.π. είναι λύσεις του προβλήματος.

**26.** $f(x) = e^{x\ln x}$

**27.** $[-\sqrt{7}, -1]$

**28. i.** $α = 1$, **ii.** $α \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, **iii.** $[2, +\infty)$

**30.** $x = 1$ ή $x = 2$ .

**31. i.** $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{x}{1-x}$, με $x \in (0, 1)$ **ii.** $g^{-1}(x) = e^{2(x-1)}$ , με $x \in R$

**iii.** $h^{-1}(x) = x^2 - 10x + 27$, με $x \in (5, +\infty)$ **iv.** $k^{-1}(x) = \dfrac{x}{2+x}$ , με $x \in R-\{-2\}$ .

**v.** $φ^{-1}(x) = \ln\dfrac{e^x+1}{1-e^x}$ , με $x<0$ . **vi.** $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}$ , με $x \ge 2$

**vii.** $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , x \ge 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & , x < 0 \end{cases}$

**32. 2. α.** Γράφουμε τη συνάρτηση σε πολλαπλό τύπο κ.λ.π. (Σύμφωνα με την παρατήρηση).

**β.** Είναι $f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x}, & -1 < x \le 0 \\ \dfrac{x}{1-x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$

**33. Α. α.** $g(x) = x + 2$, $D_g = Δ$, **β.** $φ(x) = \dfrac{x}{1+2x}$ , $D_φ = Δ$

**Β. α.** $f^{-1} = f$, $g^{-1} = x - 2$ , $x \in (2, +\infty)$, $h^{-1} = \dfrac{1-2x}{x}$, $x \in (0, \dfrac{1}{2})$

**β.** $(f^{-1}og^{-1})(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $x \in (2, +\infty)$, $(g^{-1}of^{-1})(x) = \dfrac{1-2x}{x}$ , $x \in (0, \dfrac{1}{2})$

**γ.** Είναι ίσες, , (γενικά ισχύει $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$).

**34. Β.** $x = 1$

**35. ii** $x < 1$ **iv.** Βλέπε παρατήρηση 11 του δεύτερου μέρους . **v.** $x < 1$.

.

# ΙΙ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

## ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
## ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

.

# ΙΙ. ΟΡΙ0 – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

## Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό – Λάθος»

1. Μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο $x_0$, έναν πραγματικό αριθμό $\ell$. Αναγκαστικά το $x_0$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Σ Λ
2. Τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f, όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο $x_0$, συμπίπτουν πάντοτε. Σ Λ
3. Το όριο μιας συνάρτησης f στο $x_0$ εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Σ Λ
4. Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο $x_0$, τότε αυτό είναι μοναδικό. Σ Λ
5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, τότε υπάρχει συνάρτηση φ με $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ και $f(x) = \ell + \varphi(x)$. Σ Λ
6. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell$, τότε οι συναρτήσεις f, g έχουν πάντοτε όριο στο $x_0$. Σ Λ
7. Αν για τις συναρτήσεις $f, g : A \to R$ υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) . g(x)]$, τότε πάντοτε $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) . g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) . \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ Σ Λ
8. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x} - 1$. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. Σ Λ
9. Μια συνάρτηση f έχει στο $x_0 = 2004$ όριο το $-2004$. Τότε η f παίρνει αρνητικές τιμές για κάποια x κοντά στο 2004. Σ Λ
10. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|, \ell \neq 0$, τότε πάντοτε ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Σ Λ
11. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι θετικός αριθμός, τότε η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο $x_0$. Σ Λ
12. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα που περιέχει το 0. Τότε ισχύει πάντοτε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Σ Λ

**13.** Αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta$, $\lim\limits_{x\to\beta} g(x)=\gamma$ και $f(x)\neq\beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x))=\gamma$. **Σ Λ**

**14.** Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x}=1$ με $\alpha\neq 0, 1$. **Σ Λ**

**15.** Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\ell$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{x}=3\ell$. **Σ Λ**

**16.** Αν $0\leq f(x)\leq \dfrac{1}{x}+e^{-x}$, για κάθε $x\in R$, τότε ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. **Σ Λ**

**17.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ και $g(x)<0$ κοντά στο $x_0$, τότε πάντοτε ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x).\,g(x))=-\infty$. **Σ Λ**

**18.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$. **Σ Λ**

**19.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο $x_0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$. **Σ Λ**

**20.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\ell}$. **Σ Λ**

**21.** Αν η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε πάντοτε ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. **Σ Λ**

**22.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο (α, β) και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)<0$, τότε θα ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. **Σ Λ**

**23.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], και παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $f(x_1)$, $f(x_2)$ με $x_1, x_2\in[\alpha,\beta]$, τότε παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$. **Σ Λ**

**24.** Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο R, ισχύει $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=4$, τότε υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=e$. **Σ Λ**

**25.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα [f(α), f(β)]. **Σ Λ**

**26.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα [f (β), f (α)]. **Σ Λ**

**27.** Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο [α, β] με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των f (α) και f (β). **Σ Λ**

**28.** Αν $(1 - x)(1 + 5x) \leq f(x) \leq (3x + 1)^2$, τότε η f είναι συνεχής στο 0. **Σ Λ**

**29.** Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, τότε το σύνολοτιμών της είναι το διάστημα $(\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x))$. **Σ Λ**

**30.** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β]. Αν η f είναι 1-1 στο [α, β], τότε είναι και γνησίως μονότονη στο [α, β]. **Σ Λ**

**31.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0$ με $f(x_0) \neq 0$, τότε κοντά στο $x_0$ οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$. **Σ Λ**

**32.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, τότε η αντίστροφή της είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο f (Δ). **Σ Λ**

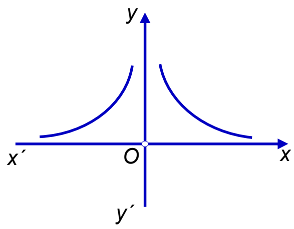
**33.** Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ είναι συνεχής και 1-1 στο Δ, τότε η συνάρτηση $f^{-1}$ είναι συνεχής στο f (Δ). **Σ Λ**

**34.** Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. **Σ Λ**

**35.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ 2 - x^2, & x \geq 1 \end{cases}$. **Σ Λ**

Ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο R - {1}.

**36.** Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι συνεχής στο $D_f$. **Σ Λ**




**37.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0$ και η συνάρτηση g **δεν** είναι συνεχής στο $x_0$, τότε και η συνάρτηση f + g δεν είναι συνεχής στο $x_0$. **Σ Λ**

---

**38.** Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι συνεχείς στο σημείο $x_0$ του κοινού πεδίου ορισμού τους, τότε η συνάρτηση f + g **δεν** είναι συνεχής στο $x_0$. **Σ Λ**

**39.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της, τότε και η $f^2$ είναι συνεχής στο $x_0$. **Σ Λ**

***ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:***

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζονται οι ερωτήσεις με τις πράξεις των ορίων . π.χ.

**i.** Αν υπάρχουν στο R τα $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, τότε υπάρχει και το

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Η πρόταση αυτή είναι Σωστή . (Η απόδειξη γίνεται με τις ιδιότητες των ορίων).

**ii.** Αν υπάρχουν στο R τα $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ , τότε υπάρχει και το

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Η πρόταση αυτή είναι Λάθος. (Γιατί το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ μπορεί να είναι ίσο με το μηδέν).

Πρέπει βεβαίως να προσέχουμε αν το όριο είναι το $\pm\infty$, γιατί τότε μπορεί να

προκύπτει μία απροσδιόριστη μορφή . (βλέπε σελίδα 179 του σχ. βιβλίου).

## Ασκήσεις για λύση

### ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in R$

**1.** Αποδείξτε ότι :

**α.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}=-12$

**β.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}=0$

**γ.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=3$

**δ.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{(x-2)(x^2-4)}=\dfrac{1}{4}$

**ε.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\dfrac{1}{6}$

**στ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{4x-4}=\dfrac{3}{16}$

**ζ.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4x+5}-5}{25-x^2}=\dfrac{-1}{25}$

**η.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}=\dfrac{-1}{12}$

**θ.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=24$

**ι.** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\dfrac{-1}{56}$

**2.** Αποδείξτε ότι :

**α.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{x^2-1}=\dfrac{5}{12}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x+2\sqrt{x}-8}=\dfrac{4}{3}$

**γ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}=\dfrac{5}{6}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=3$

**3.** Αποδείξτε ότι :

**α.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\dfrac{1}{2}$

**β.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+1)^3+8}{2(x-1)^2-32}=-\dfrac{3}{4}$

**γ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\mu-1}{x^\nu-1}=\dfrac{\mu}{\nu}\quad \mu,\nu\in\mathbb{N}^*$

**δ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x+1}{x-1}=\nu^2-1$

**4.** Αποδείξτε ότι :

**α.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x-2|+|x-3|-9}{x^2-4}=\dfrac{1}{2}$

**β.** $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-3+|3x-x^2|}{x^2-9}=-\dfrac{1}{3}$

**γ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x^7-5x^3+2|-|x^5+2x^2-4x-2|}{x^2-2x}=2$

**δ.** $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{\sqrt{x^2+3}-2x}=\dfrac{2}{3}$

**ε.** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x^2-5x+6|+x^2-2x}{|x+3|-5}=3$

**5.** Αποδείξτε ότι **δεν** υπάρχουν τα παρακάτω όρια.

**α.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|+x^2-9}{x-3}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-3x+2|}{|x+1|-2}$

**γ.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-4|+3x^2-12}{|x^2-3x+2|}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x+2|+|x-1|-3}{x^2-x}$

**6.** Αποδείξτε ότι :

**α.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}=1$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x+\eta\mu 2x}{x}=5$

**γ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}=1$

**ε.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 4x}{\sqrt{4x+9}-3}=6$ **στ.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(3x-6)}{5x-10}=\dfrac{3}{5}$

**7.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} &, -2<x<2\\ x^2+5x+2 &, x\geq 2\end{cases}$

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=16$.

**8.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} &, -7\leq x<2\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-8} &, x>2\end{cases}$

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\dfrac{1}{6}$.

**9.** Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε $3x-x^2\leq f(x)\leq x^2+3x$ , για κάθε $x\in R$.

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x^2+x}=3$.

**10.** Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε $4x\sqrt{x^2+3}\leq(x-1)f(x)+8x\leq 5x^2+3$

για κάθε $x\in R$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)f(x)+\eta\mu\pi x}{x^2-3x+2}=\pi-2$.

**11.** Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x+\eta\mu 2x+\eta\mu 3x+...+\eta\mu\nu x}{x}=28$, $\nu\in N^*$, αποδείξτε ότι $\nu=7$.

**12.** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο σύνολο $R-\{-1,\ 1\}$ και περιττή.

Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)f(x)+\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}=2\pi$ , να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$.

**13.** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο σύνολο R, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=9$.

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|f(x)-f^2(x)\right|-8f(x)}{\sqrt{f(x)}-3}=54$ .

**14.** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο σύνολο R, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,f(2x)-f(-x)\eta\mu 3x}{2x^2-\eta\mu^2 x}=10$.

**15.** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο σύνολο R, για την οποία ισχύει

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot\eta\mu x\cdot\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=3$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

**16.** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο σύνολο R, για την οποία ισχύει

$\left|f(x)\eta\mu x-2x\right|\le x^2$, για κάθε $x\in R$. Αποδείξτε ότι:

**i.** $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$, **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,f(x)+\eta\mu x}{2x-\eta\mu x}=3$.

**17.** Έστω συναρτήσεις f, g ,ορισμένες στο σύνολο R,για τις οποίες ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)}{x+3}=2$ και $\lim\limits_{x\to -3}\left[g(x)(2x^2+5x-3)\right]=-14$.

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to -3}\left[f(x)g(x)\right]=4$.

**18.** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο σύνολο R, για την οποία ισχύει

$\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)+x^2-x+2\right]=3$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-2f(x)-3}{f^2(x)-1}=2$.

**19.** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη στο σύνολο R, για την οποία ισχύει

$\lim\limits_{x\to 1}\left[2f(x)+x^2-x+2\right]=6$. Αποδείξτε ότι :

**i.** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$ , **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2f(x)}-2}{\left(f(x)\right)^2-4}=\dfrac{1}{8}$.

**20.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\left|xf(x)-2\eta\mu x\right|\le x^2$, για κάθε x, κοντά στο $x_0=0$,

αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.

**21.** Έστω συναρτήσεις f, g, ορισμένες στο σύνολο R, για τις οποίες ισχύουν :

$\lim\limits_{x\to 1}(4f(x)-g(x))=7$ και $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+3g(x))=5$. Αποδείξτε ότι:

**i.** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$, **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=1$ ,

**iii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)f(x)-\eta\mu(\pi x)}{(x^2-1)g(x)+\eta\mu(\pi x)}=\dfrac{2+\pi}{2-\pi}$.

## ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in R$

**22.** Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

**α.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+1}{x^2-4x+4}$

**ε.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x+3|-2}{|x-2|}$

**β.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$

**στ.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x|x|}$

**γ.** $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2-2x}}$

**ζ.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x-\pi}{1-\etaμx}$

**δ.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-3x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

**η.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2-2}{(5x+3)\etaμx}$

**23.** Έστω συνάρτηση f, για την οποία ισχύουν: $f(x) \neq 3$, κοντά στο $x_0=3$ και $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)+5}{f(x)-3} = +\infty$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$.

**24.** Αν $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-\alpha x+\beta}{x-2} = 3$, να υπολογιστούν τα α, β∈R.

**25.** Αν $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+\alpha}-3}{x-3} \in R$, να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α.

**26.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{(x^2-\alpha)^2}{(x-2)(\sqrt{x+7}-3)}$. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α αν $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 96$.

**27.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-\lambda x+6}{x-2}$. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ αν το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

**28.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3-x^2+\lambda x+9}{x^3-9x}$. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ αν το $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

**29.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+(2-3\alpha)x+\beta-3\alpha-1}{2x-2}$, α, β ∈R. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, αν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -4$.

## ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

**30.** Να αποδείξετε ότι :

**α.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-2)(x^2+5)}{3x^2-6x+1-2x^3}=-\dfrac{1}{2}$

**ε.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x-5|-|9-x^2|+2}{3x-6}=-\infty$

**β.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)^{15}(x+2)^{18}}{(x^2-x+3)^{15}}=+\infty$

**στ.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|2x-1|-3|4-2x|+1}{5x^4+2}=0$

**γ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|3x-6|-|1-x|+2}{x-5}=2$

**ζ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x^2+3x}=0$

**δ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)...(x-10)}{(x-2004)^{10}}=1$

**η.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3\eta\mu x}{5x+\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1}{5}$

***ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:***

Βλέπε το σχόλιο στη σελίδα 39.

**31.** Να αποδείξετε ότι :

**α.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{x+1}-5^{x+2}}{3^x+5^{x+3}}=-\dfrac{1}{5}$

**β.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+5^x+7^x}{2^x+3^x+5^x}=+\infty$

**γ.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x+3^x}{2^x-3^x}=1$

**δ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x-2^x}{e^x+4.2^x}=3$

**ε.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{x+1}-3^x}{2^{x+2}+3^{x+1}}=\dfrac{1}{2}$

**στ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{-x}-3^x}{3^{-x}+3^x}=-1$

**ζ.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5^x-3^{x+1}}{5^x+3^{x-1}}=-9$

**η.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(e^{x+1}+1)-\ln(e^x+2)+5\right)=6$

**θ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(5x-2)-3\ln(x+1)\right]=-\infty$

**32.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha^{x+1}-2^{x+2}}{\alpha^x+2^x}$, $\alpha>0$. Να υπολογίσετε

για τις διάφορες τιμές του θετικού πραγματικού αριθμού $\alpha$ το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

**33.** Αποδείξτε ότι :

**α.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x}-x)=-1$

**β.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+3}{\sqrt{x^2+7}+x}=-2$

**γ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3x})=-\dfrac{3}{2}$

**δ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}-x)=1$

**ε.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x+1}\,(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5})\right]=-1$

**στ.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+10}+2x\right)=-\dfrac{1}{2}$

**ζ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x(\sqrt{x^2+1}-x)\right]=\dfrac{1}{2}$ **η.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}=0$

**θ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}=1$

**34.** Αποδείξτε ότι :

**α.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+2x+1}-3x\right)=1$

**β.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+1}+2x\right)=-\dfrac{1}{2}$

**γ.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}-x\right)=+\infty$

**35.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}-\mu x$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$,

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού μ .

**36.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{-3x^2+2x-4}{x-1}-\lambda x-\mu$. Να υπολογίσετε

τους πραγματικούς αριθμούς $\lambda, \mu$ αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

**37.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+x-1}-\alpha x$ . Να υπολογίσετε τους

πραγματικούς αριθμούς α, β αν ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{\beta}{2}$ .

**38.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+1}{4x+3}-\alpha x+\beta$. Να υπολογίσετε τους

πραγματικούς αριθμούς α , β αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{19}{8}$.

**39.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta-\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ . Να προσδιορίσετε τους

πραγματικούς αριθμούς α , β αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=4$.

**40.** Δίνεται συνάρτηση f τετοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,f^2(x)+2f(x)+x}{x\,f^2(x)+x\,f(x)+2f(x)-3}=1$$

# ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f και $x_0$ ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο $x_0$ όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0, αφού

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 = f(0)$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_o$ του πεδίου ορισμού της όταν:

**α.** Δεν υπάρχει το όριο της f στο $x_o$ ή

**β.** Υπάρχει το όριο της f στο $x_o$, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_o)$, στο σημείο $x_o$.

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση.**

- **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση Ρείναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_o \in R$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o} P(x) = P(x_o).$$

- **Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_o$ του πεδίου ορισμού της ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_o)}{Q(x_o)}$.

- **Οι συναρτήσεις $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$ είναι συνεχείς**, αφού για κάθε $x_o \in R$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_o}(ημx) = ημx_o$ και $\lim\limits_{x\to x_o}(συνx) = συνx_o$.

- **Οι συναρτήσεις $f(x) = α^x$** και **$g(x) = \log_α x$, $0 < α \neq 1$** είναι συνεχείς.

### Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Από τον ορισμό της συνέχειας στο $x_o$ και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $x_o$, τότε είναι συνεχείς στο $x_o$ και οι συναρτήσεις $f + g$, $c\cdot f$, όπου $c \in R$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[ν]{f}$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το $x_o$

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x) = εφx$ και $g(x) = σφx$ είναι **συνεχείς** ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

## ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_o$ και η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $f(x_o)$, τότε η σύνθεσή τους $gof$ είναι συνεχής στο $x_o$.

Για παράδειγμα,η συνάρτηση

$φ(x) = συν(ημx)$

Είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$ .

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gof"'] & y=ημx \arrow[d, "g"] \\ & φ(x) = συνy = συν(ημx) \end{tikzcd}$$

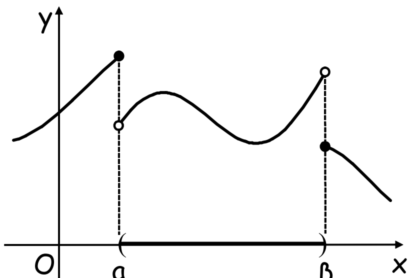
# Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα

## ΟΡΙΣΜΟΣ

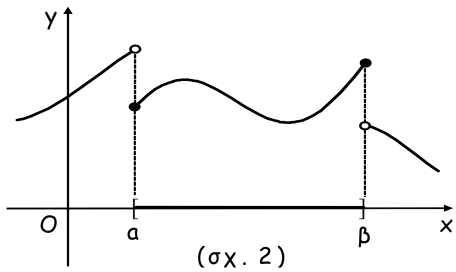
Μια συνάρτηση $f$ θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα, $(α , β)$ όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $(α , β)$. (σχ. 1)

Μια συνάρτηση $f$ θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α , β]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $(α , β)$ και επιπλέον $\lim\limits_{χ \to α^+} f(x) = f(α)$ και

$\lim\limits_{x \to β^-} f(x) = f(β)$. (σχ. 2)



(σχ. 1)



(σχ. 2)

***Προσοχή!!! Η συνέχεια στο κλειστό διάστημα [α,β] ΔΕΝ εξασφαλίζει τη συνέχεια στα α , β.***

.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1. Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια στο $x_o=0$ οι συναρτήσεις:**

**α.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x} & , x\neq 0\\ 1 & , x=0\end{cases}$ **β.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{x} & , x\neq 0\\ 1 & , x=0\end{cases}$ **γ.** $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x} & , x>0\\ \sigma\upsilon\nu x & , x\leq 0\end{cases}$

**Λύση**

**α.** Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1=f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

**β.** Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\eta\mu^2 x}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(2\eta\mu x\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=2\cdot 0\cdot 1=0\neq f(0)$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_o=0$.

**γ.** Για $x>0$ έχουμε $\left|\eta\mu x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|=|\eta\mu x|\cdot\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq|x|\cdot 1=|x|=x$, οπότε

$-x\leq\eta\mu x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq x$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0=\lim\limits_{x\to 0^+}x$, άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$

Για $x<0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sigma\upsilon\nu x=1$.

Παρατηρούμε ότι $1=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$, δηλαδή δεν υπάρχει το όριο

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_o=0$.

**2. Αν $f(x)=\begin{cases}\alpha^2x^3+x-2\beta, & x<1\\ \ln x-\beta^2x & , x\geq 1\end{cases}$, να βρεθούν τις τιμές των α, β $\in\mathbb{R}$ για τις ο-ποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής.**

**Λύση**

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι συνεχής στο διάστημα$(1, \infty)$, ως άθροισμα συνεχών.
- Για να είναι η f συνεχής συνάρτηση πρέπει και αρκεί η f να είναι συνεχής και στο $x_o=1$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\alpha^2x^3+x-2\beta)=\alpha^2+1-2\beta$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x-\beta^2x)=\ln 1-\beta^2=-\beta^2$

$f(1)=\ln 1-\beta^2=-\beta^2$.

Επομένως πρέπει και αρκεί

$$\alpha^2+1-2\beta=-\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2+(\beta-1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \ \text{ και } \ \beta=1.$$

**3. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία για κάθε $x\in R$ ικανοποιεί τη σχέση $xf(x)=\sqrt{1+\eta\mu x}-1$. Να βρεθεί το $f(0)$**

**Λύση**

Για κάθε $x\in R^*$ ισχύει $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\eta\mu x}-1}{x}$.

Η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, οπότε

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\eta\mu x}-1\right)\left(\sqrt{1+\eta\mu x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+\eta\mu x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\eta\mu x-1}{x\left(\sqrt{1+\eta\mu x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\eta\mu x}+1}\right)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

**4. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία για κάθε $x\in R$ ικανοποιεί τη σχέση $(x+\eta\mu x)f(x)=x-\eta\mu x$.**

**Λύση**

Για κάθε $x\in R^*$ ισχύει $f(x)=\dfrac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$.

Η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, οπότε

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\eta\mu x}{x}}{1+\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

Επομένως $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x} &, \ x\neq 0\\ 0 &, \ x=0\end{cases}$

**5. Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής στο $x_o=1$ και ικανοποιεί τη σχέση $(x-1)f(x)\le x^2-3x+2$ για κάθε $x\in R$, να βρεθεί το $f(1)$.**

**Λύση**

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=1$, ισχύει $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f(x)\le\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}\Leftrightarrow f(x)\le x-2$, οπότε:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)\le\lim_{x\to 1^+}(x-2)\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^+}f(x)\le -1\Leftrightarrow f(1)\le -1 \qquad (1)$$

Για κάθε $x\in(-\infty,1)$ είναι $f(x)\ge\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}\Leftrightarrow f(x)\ge x-2$, οπότε

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)\ge\lim_{x\to 1^+}(x-2)\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^+}f(x)\ge -1\Leftrightarrow f(1)\ge -1 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι $f(1)=-1$.

**6. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία είναι συνεχής στο $x_o = 0$ και για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τη σχέση $ημx - x^2 \le xf(x) \le ημx + x^2$. Να βρεθεί το $f(0)$**

**Λύση**

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$\frac{ημx - x^2}{x} \le f(x) \le \frac{ημx + x^2}{x} \Leftrightarrow \frac{ημx}{x} - x \le f(x) \le \frac{ημx}{x} + x.$$

Είναι

$\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\frac{ημx}{x} - x\right) = 1$ και $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\frac{ημx}{x} + x\right) = 1$, οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι και $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

Επεδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, ισχύει $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ οπότε $f(0) = 1$.

**7. Αν η συνάρτηση $f: R \to R$, ικανοποιεί τη σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in R$ (1). Να αποδειχθεί ότι:**

**α. $f(0) = 0$.**

**β. Αν η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, τότε η f είναι συνεχής στο R.**

**γ. Αν η f είναι συνεχής στο $x_o = α$, $α \in R$, τότε η f είναι συνεχής στο R.**

**Λύση**

**α.** Για $x = y = 0$ έχουμε $f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$. (2)

**β.** Η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, οπότε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. (3)

Έστω τυχαίο $x_o \in R$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0$, δηλαδή $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$. Θέτουμε $x = x_o + h$, οπότε όταν $x \to x_o$ το $h \to 0$.

Έχουμε: $\lim\limits_{h \to 0} f(x_o) + \lim\limits_{h \to 0} f(h) \overset{(3)}{=} f(x_o) + 0 = f(x_o)$

Επομένως η f είναι συνεχής στο R

**γ.** Η f είναι συνεχής στο $x_o = α$, οπότε $\lim\limits_{x \to α} f(x) = f(α)$. (4)

Έστω τυχαίο $x_o \in R$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_o$, δηλαδή $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$. Θέτουμε $x = x_o + h - α$, οπότε όταν $x \to x_o$ το $h \to α$.

Έχουμε:

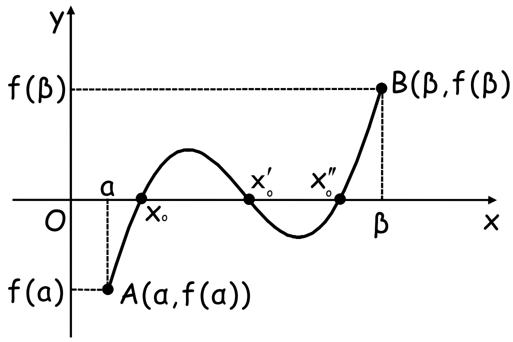
$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{h \to α} f(x_o + h - α) \overset{(1)}{=} \lim_{h \to α}\left[f(h) + f(x_o - α)\right] = \lim_{h \to α} f(h) + \lim_{h \to α} f(x_o - α) \overset{(4)}{=}$$

$$f(α) + f(x_o - α) \overset{(1)}{=} f(α + x_o - α) = f(x_o).$$ Επομένως η f είναι συνεχής στο R.

# ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ
# ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

## Θεώρημα του Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.




Ισχύει λοιπόν το παρακάτω θεώρημα.

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

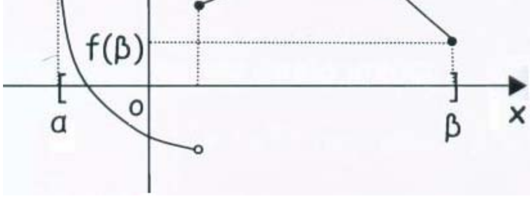
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x_o)=0$ στο ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta)$.

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Για να ισχύει το Θεώρημα Bolzano πρέπει να ισχύουν απαραιτήτως και οι δύο προϋποθέσεις του.
- Αν μια τουλάχιστον από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει, τότε αυτό δε σημαίνει κατ' ανάγκη ότι δεν υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=0$.
- Το Θεώρημα Bolzano εφαρμόζεται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
- Το Θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f(x_o)=0$. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν και περισσότερες από μία ρίζες, όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα.
- Δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος Bolzano, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δηλαδή η ύπαρξη μιας ρίζας δεν εξασφαλίζει τη συνέχεια της συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$ ούτε ότι οι τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ είναι ετερόσημες.



**Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Ε Σ**

1. **Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $2x - ημx = συνx$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0 , π)$.**

**Λύση**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x - ημx - συνx$, $x \in R$ και παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0 , π]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $f(0) \cdot f(π) = (-1) \cdot (2π + 1) = -2π - 1 < 0$.

Ισχύει το Θεώρημα Bolzano, άρα η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x - ημx = συνx$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0 , π)$.

2. **Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = x \cdot συνπx$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.**

**Λύση**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} - x \cdot συνπx$, $x \in (0 , +\infty)$ και παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στο $[1 , 4]$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $f(1) \cdot f(4) = 3 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{21}{4} < 0$.

Ισχύει το Θεώρημα Bolzano, άρα η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{x} = x \cdot συνπx$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1 , 4)$, δηλαδή μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

3. **Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $19x^{56} + 3x^{22} = 2$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.**

**Λύση**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 19x^{56} + 3x^{22} - 2$, $x \in R$ και παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1 , 0]$ και $[0, 1]$ ως πολυωνυμική.
- $f(-1) \cdot f(0) = 20 \cdot (-2) = -40 < 0$ και $f(0) \cdot f(1) = (-2) \cdot 20 = -40 < 0$.

Ισχύει το Θεώρημα Bolzano σε δύο διαστήματα, επομένως η εξίσωση

$f(x)=0 \Leftrightarrow 19x^{56}+3x^{22}=2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$ δηλαδή δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1,1)$.

**4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\ln x+(x-\alpha)^2=0$, με $\alpha\neq 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.**

### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x+(x-\alpha)^2,\ x\in(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, άρα $f(x)<0$ κοντά στο $x_0=0$ από μεγαλύτερες τιμές, δηλαδή υπάρχει διάστημα της μορφής $(0,\beta)$ με $\beta<1$ τέτοιο, ώστε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\beta)$, οπότε $f(\kappa)<0$ για $\kappa\in(0,\beta)$.

Παρατηρούμε ότι: ψωψ

- Η f είναι συνεχής στο $[\kappa,1]\subseteq(0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $f(\kappa)\cdot f(1)=\underbrace{f(\kappa)}_{<0}\cdot\underbrace{(1-\alpha)^2}_{>0}<0$ (αφού $\alpha\neq 1$) Ισχύει το Θεώρημα Bolzano, άρα

η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow \ln x+(x-\alpha)^2=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\kappa,1)\subseteq(0,1)$, άρα μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\ 1)$.

**5. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\dfrac{x^8+1}{x-1}+\dfrac{x^{12}+2}{x-2}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.**

### Λύση

**1ος τρόπος (γενικός τρόπος)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^8+1}{x-1}+\dfrac{x^{12}+2}{x-2},\ x\in(1,2)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, άρα $f(x)>0$ κοντά στο $x_1=1$ από μεγαλύτερες τιμές, δηλαδή υπάρχει διάστημα της μορφής $(1,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(1,\alpha)$, οπότε $f(\kappa)>0$ για $\kappa\in(1,\alpha)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$, άρα $f(x)<0$ κοντά στο $x_2=2$ από μικρότερες τιμές, δηλαδή υπάρχει διάστημα της μορφής $(\beta,2)$ με $\beta>\alpha$ τέτοιο, ώστε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\beta,2)$, οπότε $f(\lambda)<0$ για $\lambda\in(\beta,2)$.

Παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στο $[\kappa, \lambda] \subseteq (1, 2)$ ως ρητή συνάρτηση.
- $\underbrace{f(\kappa)}_{>0} \cdot \underbrace{f(\lambda)}_{<0} < 0$.

Ισχύει το Θεώρημα Bolzano, άρα η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^8+1}{x-1} + \frac{x^{12}+2}{x-2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\kappa, \lambda] \subseteq (1, 2)$ άρα μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

**2ος τρόπος (ειδικός τρόπος)**

Για κάθε $x \in R - \{1, 2\}$ είναι

$$\frac{x^8+1}{x-1} + \frac{x^{12}+2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^8+1) + (x-1)(x^{12}+2) = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-2)(x^8+1) + (x-1)(x^{12}+2)$, $x \in R$ και παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ ως πολυωνυμική.
- $f(1) \cdot f(2) = (-2) \cdot (2^{12}+2) < 0$.

Ισχύει το Θεώρημα Bolzano, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi) = 0 \Leftrightarrow (\xi-2)(\xi^8+1) + (\xi-1)(\xi^{12}+2) = 0 \underset{\xi \in (1,2)}{\overset{:(\xi-1)(\xi-2)}{\Leftrightarrow}} \frac{\xi^8+1}{\xi-1} + \frac{\xi^{12}+2}{\xi-2} = 0. \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\xi \in (1, 2)$ επαληθεύει την αρχική εξίσωση $\frac{x^8+1}{x-1} + \frac{x^{12}+2}{x-2} = 0$.

Επομένως η αρχική εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

**6. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 = \pi x + \alpha \sigma\upsilon\nu x$, $\alpha \in R$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0, \pi]$.**

**Λύση**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - \pi x - \alpha \sigma\upsilon\nu x$, $x \in R$ και παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $f(0) \cdot f(\pi) = -\alpha^2 \le 0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

**i.** Αν $\alpha \ne 0$ τότε $f(0) \cdot f(\pi) < 0$, οπότε ισχύει το Θεώρημα Bolzano, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ έτσι, ώστε $f(\xi) = 0$.

**ii.** Αν $\alpha = 0$ τότε η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$x^2 = \pi x \Leftrightarrow x(x-\pi) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pi$.

Επομένως για κάθε $\alpha \in R$ η εξίσωση $x^2 = \pi x + \alpha\,\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0, \pi]$.

**7. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to R$, η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση $(\alpha^2+1)\cdot f(a) + (\beta^2+1)\cdot f(\beta) = 0$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.**

**Λύση**

Είναι

$$(\alpha^2+1)f(\alpha) + (\beta^2+1)f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = -\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}f(\alpha) \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, από υπόθεση.
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) \overset{(1)}{=} -\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}\cdot f^2(\alpha) \le 0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

**i.** Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$ τότε ισχύει το Θεώρημα Bolzano, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha, \beta)$.

**ii.** Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta) = 0$ τότε $f(\alpha) = 0$ ή $f(\beta) = 0$, οπότε ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι το α ή το β.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

**8. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $e^x + x - 2 = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα.**

**Λύση**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $e^x + x - 2 = 0$ $x \in R$ και παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $f(0)\cdot f(1) = (-1)\cdot(e-1) = 1 - e < 0$.

Ισχύει το Θεώρημα Bolzano, άρα η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + x - 2 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$, άρα έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Για κάθε $x \in R$ είναι $f'(x) = \left(e^x + x - 2\right)' = e^x + 1 > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow e^x + x - 2 = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα.

**9. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση**

$$\boldsymbol{\alpha(x-\beta)(x-\gamma)+\beta(x-\gamma)(x-\alpha)+\gamma(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad \text{με} \quad 0<\alpha<\beta<\gamma}$$

**έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.**

**Λύση**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha(x-\beta)(x-\gamma)+\beta(x-\gamma)(x-\alpha)+\gamma(x-\alpha)(x-\beta)$, $x \in R$ και παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$ ως πολυωνυμική.
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) = \underbrace{-\alpha\beta}_{<0}\underbrace{(\alpha-\beta)^2}_{>0}\underbrace{(\beta-\gamma)}_{<0}\underbrace{(\alpha-\gamma)}_{<0} < 0$ και

  $f(\beta)\cdot f(\gamma) = \underbrace{-\beta\gamma}_{<0}\underbrace{(\beta-\gamma)^2}_{>0}\underbrace{(\beta-\alpha)}_{>0}\underbrace{(\gamma-\alpha)}_{>0} < 0$

Ισχύει το Θεώρημα Bolzano σε δύο διαστήματα, επομένως η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha(x-\beta)(x-\gamma)+\beta(x-\gamma)(x-\alpha)+\gamma(x-\alpha)(x-\beta)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha, \beta)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\beta, \gamma)$, δηλαδή δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες.

Όμως η εξίσωση $\alpha(x-\beta)(x-\gamma)+\beta(x-\gamma)(x-\alpha)+\gamma(x-\alpha)(x-\beta)=0$ είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού, οπότε έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Επομένως η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες, οι οποίες είναι και άνισες μεταξύ τους αφού ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

**10. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha, \beta]\to R$, με $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o) = \dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$, όπου $\kappa, \lambda \in R$ με $\kappa\cdot\lambda > 0$.**

**Λύση**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (\kappa+\lambda)f(x) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta)$, $x \in [\alpha, \beta]$ και παρατηρούμε ότι:

- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

- $g(\alpha)\cdot g(\beta) = -\kappa\lambda\left[f(\alpha)-f(\beta)\right]^2 < 0$, αφού $\kappa\lambda > 0$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Ισχύει το Θεώρημα Bolzano, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha , \beta)$ τέτοιο,

ώστε $g(x_o) = 0 \Rightarrow (\kappa+\lambda)f(x_o) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(x_o) = \dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$.

## Π Ρ Ο Τ Α Σ Η

Αν μια συνάρτηση $f$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, δηλαδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή **διατηρεί σταθερό πρόσημο** στο διάστημα Δ.

### Απόδειξη

Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ, τότε θα υπάρχουν $\kappa , \lambda \in \Delta$ με $\kappa < \lambda$ τέτοια, ώστε $f(\kappa)\cdot f(\lambda) \leq 0$.

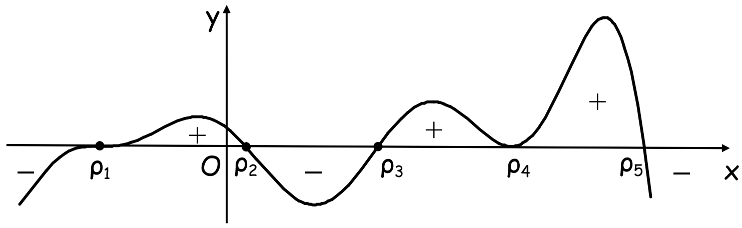
Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $f(\kappa)\cdot f(\lambda) = 0$ τότε $f(\kappa)=0$ ή $f(\lambda) = 0$ που είναι άτοπο γιατί $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- Αν $f(\kappa)\cdot f(\lambda)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[\kappa , \lambda] \subseteq \Delta$ ισχύει το Θεώρημα Bolzano, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\kappa, \lambda)$ έτσι, ώστε $f(\xi) = 0$, που είναι άτοπο γιατί $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

## ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano και την προηγούμενη Πρόταση προκύπτει ότι:

- Μια συνεχής συνάρτηση $f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της $f$ χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.




Αυτό μας διευκολύνει στον **προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x.** Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

**α.** Βρίσκουμε τις ρίζες της $f$.

**β.** Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της $f$ στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της $f$ στο αντίστοιχο διάστημα.

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1. Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = ημ2x - \sqrt{2}συνx$, για τις διάφορες τιμές του $x \in [0, \pi]$.**

**Λύση**

♦ Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

Είναι

$$f(x)=0 \Leftrightarrow ημ2x-\sqrt{2}συνx=0 \Leftrightarrow 2ημxσυνx-\sqrt{2}συνx=0 \Leftrightarrow συνx\left(2ημx-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} συνx=0 \\ ή \\ ημx=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} συνx=0 \\ ή \\ ημx=ημ\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=κ\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ ή \\ x=2κ\pi+\dfrac{\pi}{4} \quad ή \quad x=2κ\pi+\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}, \quad κ \in Z$$

Επειδή $x \in [0, \pi]$ οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{2}$ και $x=\frac{3\pi}{4}$.

♦ Οι ρίζες της f χωρίζουν το διάστημα $[0, \pi]$ στα υποδιαστήματα:

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right].$$

♦ Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε ένα τυχαίο αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

♦ Στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, επιλέγουμε τον αριθμό $\frac{\pi}{6}$ και έχουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=ημ\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}συν\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}<0,$$

άρα $f(x)<0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$.

♦ Στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, επιλέγουμε τον αριθμό $\frac{\pi}{3}$ και έχουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=ημ\frac{2\pi}{3}-\sqrt{2}συν\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}>0,$$

άρα $f(x)>0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

♦ Στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, επιλέγουμε τον αριθμό $\frac{2\pi}{3}$ και έχουμε:

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=ημ\frac{4\pi}{3}-\sqrt{2}συν\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}<0,$$

άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

- Στο διάστημα $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, επιλέγουμε τον αριθμό $\frac{5\pi}{6}$ και έχουμε

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = ημ\frac{5\pi}{3} - \sqrt{2}συν\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} > 0,$$

άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

- Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της $f$ σε κάθε διάστημα.

| **Διάστημα** | $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ | $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ | $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ | $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ |
|---|---|---|---|---|
| **Επιλεγμένο ς αριθμός $x_o$** | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
| **$f(x_o)$** | $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$ |
| **Πρόσημο** | − | + | − | + |

**2. Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση**

**$f^3(x) - 3x^2f(x) + x^6 + 1 = 0$ για κάθε $x \in R$ (1).**

**α. Να αποδειχθεί ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$**

**β. Να βρεθεί το $f(0)$.**

**γ. Να αποδειχθεί ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in R$**

**Λύση**

**α.** Έστω ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in R$ τέτοιο, ώστε $f(x_o) = 0$ (2).

Για $x = x_o$ από την (1) έχουμε:

$$f^3(x_o) - 3x_o^2f(x_o) + x_o^6 + 1 = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x_o^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_o^6 = -1$$

το οποίο είναι άτοπο, άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

**β.** Για $x = 0$ από την (1) έχουμε:

$$f^3(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow f^3(0) = -1 \Leftrightarrow f(0) = -1$$

**γ.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο R, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Επειδή $f(0) = -1 < 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in R$

**3. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $f(1) > 1$ και $f^2(x) - 2xf(x) - e^x = 0$ για κάθε $x \in R$.**

**Λύση**

Για κάθε $x \in R$ έχουμε: $f^2(x) - 2xf(x) - e^x = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) = e^x \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = e^x + x^2 \Leftrightarrow \left(f(x) - x\right)^2 = e^x + x^2 \Leftrightarrow$

$g^2(x) = e^x + x^2$ (1), όπου $g(x) = f(x) - x$.

Για κάθε $x \in R$ είναι $e^x + x^2 > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$ και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής, ως διαφορά συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

Για $x = 1$ έχουμε $g(1) = f(1) - 1 > 0$, οπότε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

Αφού $g(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, από (1) ισοδύναμα έχουμε $g(x) = \sqrt{e^x + x^2} \Leftrightarrow$

$f(x) - x = \sqrt{e^x + x^2} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{e^x + x^2}$, $x \in R$.

## Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano και είναι γνωστό ως θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω μια συνάρτηση $f$, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

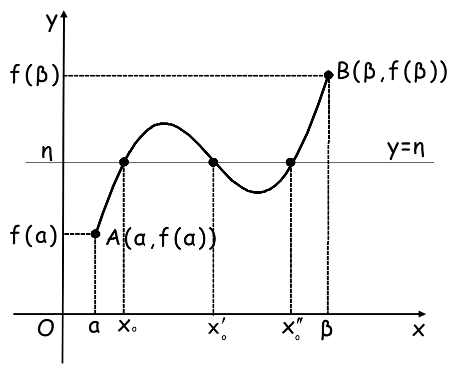
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o) = \eta$.

**Απόδειξη**

Υποθέτουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$, τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Παρατηρούμε ότι:




- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

  και

- $g(\alpha) \cdot g(\beta) = \underbrace{(f(\alpha) - \eta)}_{<0} \cdot \underbrace{(f(\beta) - \eta)}_{>0} < 0$.

Ισχύει λοιπόν το θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_o \in (\alpha\,,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_o) = 0 \Leftrightarrow f(x_o) - \eta = 0 \Leftrightarrow f(x_o) = \eta$.

**ΣΧΟΛΙΟ**

Αν μια συνάρτηση $f$ δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha\,,\beta]$, τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

- Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται ότι:

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος $\Delta$ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης $f$ είναι διάστημα.

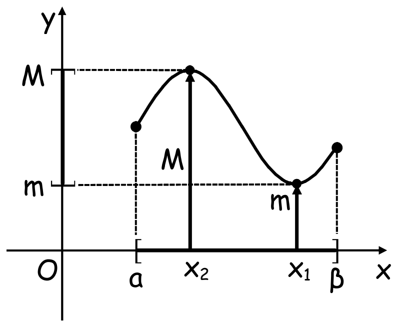
**ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)**

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha\,,\beta]$, τότε η $f$ παίρνει στο $[\alpha\,,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha\,,\beta]$ τέτοια, ώστε,

αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$m \le f(x) \le M$, για κάθε $x \in [\alpha\,,\beta]$.




**ΣΧΟΛΙΟ**

Από το παραπάνω Θεώρημα και το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το** $[\alpha\,,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m\,,M]$, όπου **m** η ελάχιστη τιμή και **M** η μέγιστη τιμή της.

Επομένως:

- Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα διάστημα **Δ**, τότε το $f(\Delta)$, δηλαδή το σύνολο τιμών της **f** για το διάστημα αυτό δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| Δ | $[\alpha , \beta]$ | $[\alpha , \beta)$ | $(\alpha, \beta]$ | $(\alpha , \beta)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(\Delta)$ | $[f(\alpha) , f(\beta)]$ | $\left[f(\alpha) , \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$ | $\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) , f(\beta)\right]$ | $\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) , \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$ |

| Δ | $(-\infty, \alpha]$ | $(-\infty, \alpha)$ | $[\alpha , +\infty)$ | $(\alpha , +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(\Delta)$ | $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(\alpha)\right]$ | $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)\right)$ | $\left[f(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ | $\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ |

| Δ | $(-\infty , +\infty)$ |
|---|---|
| $f(\Delta)$ | $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) , \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ |

- Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** σε ένα διάστημα **Δ**, τότε το $f(\Delta)$, δηλαδή το σύνολο τιμών της f για το διάστημα αυτό δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| Δ | $[\alpha , \beta]$ | $[\alpha , \beta)$ | $(\alpha, \beta]$ | $(\alpha , \beta)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(\Delta)$ | $[f(\alpha) , f(\beta)]$ | $\left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) , f(\alpha)\right]$ | $\left[f(\beta), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$ | $\left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) , \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$ |

| Δ | $(-\infty, \alpha]$ | $(-\infty, \alpha)$ | $[\alpha , +\infty)$ | $(\alpha , +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(\Delta)$ | $\left[f(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$ | $\left(\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) , \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$ | $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) , f(\alpha)\right]$ | $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) , \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$ |

| Δ | $(-\infty , +\infty)$ |
|---|---|
| $f(\Delta)$ | $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$ |

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(-1)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x))+x^6f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές $f(1)$ και $f(0)$.**

**Λύση**

Για $x=-1$ από τη δοθείσα σχέση έχουμε:

$f(f(-1))+(-1)^6f(-1)=0\Leftrightarrow f(1)+1=0\Leftrightarrow f(1)=-1$

Είναι $f(1)=-1<0<1=f(-1)$ και η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$, οπότε από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=0$.

Για $x=x_o$ από τη δοθείσα σχέση έχουμε:

$f(f(x_o))+x_o^6f(x_o)=0\Leftrightarrow f(0)+x_o^6\cdot 0=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

2. **Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f(1)=3$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)-4f(x)=x^2+1$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι συνεχής.**

**Λύση**

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση.

Είναι $1=f(0)\neq f(1)=3$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, ισχύει το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, οπότε η f θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(0)=1$ και $f(1)=3$ ,άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=2$.

Για $x=x_o$ από τη δοθείσα σχέση έχουμε:

$f^3(x_o)-4f(x_o)=x_o^2+1\Leftrightarrow 2^3-4\cdot 2=x_o^2+1\Leftrightarrow x_o^2+1=0$.

Η εξίσωση όμως $x_o^2+1=0$ είναι αδύνατη στο R, άρα και στο διάστημα $(0,1)$, οπότε η f δεν είναι συνεχής.

3. **Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $f^2(x)-4f(x)-5=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**Λύση**

**1ος τρόπος**

Για κάθε $x \in R$ είναι $f^2(x)-4f(x)-5=0 \Leftrightarrow \left(f(x)+1\right)\left(f(x)-5\right)=0$, άρα για $x_o \in R$ ισχύει $\left(f(x_o)+1\right)\left(f(x_o)-5\right)=0$, οπότε ή $f(x_o)=-1$ ή $f(x_o)=5$.

*(επειδή μια συνάρτηση σε ένα $x_o$ δεν μπορεί να πάρει δύο διαφορετικές τιμές).*

Οι τιμές λοιπόν που μπορεί να πάρει η συνάρτηση f στο $x_o$ είναι ή το $-1$ ή το 5.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει ή $f(x)=-1$ ή $f(x)=5$, δηλαδή η f είναι **σταθερή συνάρτηση.**

Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 \neq x_2$ *(χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2$)*, τέτοια ώστε $f(x_1)=-1$ και $f(x_2)=5$. Για τη συνάρτηση f έχουμε ότι είναι συνεχής στο $\left[x_1, x_2\right]$ και $-1=f(x_1) \neq f(x_2)=5$,

άρα ισχύει το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, οπότε η f θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)=-1$ και $f(x_2)=5$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in \left(x_1, x_2\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=2$ που είναι άτοπο.

Επομένως ή $f(x)=-1$ για κάθε $x \in R$ ή $f(x)=5$ για κάθε $x \in R$.

**2ος τρόπος**

Για κάθε $x \in R$ είναι

$$f^2(x)-4f(x)-5=0 \Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)=5 \Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)+4=9 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-2\right)^2=9 \Leftrightarrow g^2(x)=9 \quad (1), \text{ όπου } g(x)=f(x)-2$$

Για κάθε $x \in R$ είναι $g^2(x)>0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$ και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής, ως διαφορά συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

Άρα για κάθε $x \in R$ θα είναι ή $g(x)<0$ ή $g(x)>0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν για κάθε $x \in R$ είναι $g(x)<0$, τότε από (1) έχουμε
  $g(x)=-3 \Leftrightarrow f(x)-2=-3 \Leftrightarrow f(x)=-1$.
- Αν για κάθε $x \in R$ είναι $g(x)>0$, τότε από (1) έχουμε
  $g(x)=3 \Leftrightarrow f(x)-2=3 \Leftrightarrow f(x)=5$.

Επομένως ή $f(x)=-1$ για κάθε $x \in R$ ή $f(x)=5$ για κάθε $x \in R$.

**4. α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=ημx-\frac{1}{x}$, $x\in\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.**

**β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xημx=1-x$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.**

**Λύση**

**α.** Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta=\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, ως διαφορά συνεχών.

Για κάθε $x_1, x_2\in\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$\begin{cases} ημx_1<ημx_2\\ \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ημx_1<ημx_2\\ -\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow} ημx_1-\frac{1}{x_1}<ημx_2-\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\left(-\infty\,,\frac{\pi-2}{\pi}\right]$.

**β.** Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι:

$$xημx=1-x\Leftrightarrow ημx=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow ημx=\frac{1}{x}-1\Leftrightarrow ημx-\frac{1}{x}=-1\Leftrightarrow f(x)=-1.$$

Ο αριθμός $-1\in f(\Delta)$, άρα θα υπάρχει ένα $\xi\in\Delta=\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=-1\Leftrightarrow$
$\xi ημ\xi=1-\xi$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=-1\Leftrightarrow xημx=1-x$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

**5. α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=εφx+x^2$, $x\in\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right)$.**

**β. Να λύσετε την εξίσωση $\left(x^2+1\right)συνx+ημx=0$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.**

**Λύση**

**α.** Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, ως άθροισμα συνεχών.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$\begin{cases} \varepsilon\varphi x_1 < \varepsilon\varphi x_2 \\ x_1^2 < x_2^2 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \varepsilon\varphi x_1 + x_1^2 < \varepsilon\varphi x_2 + x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta) = \left[f(0), \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$.

**β.** Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι: $(x^2+1)\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$

$(x^2+1)\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x \overset{:\sigma\upsilon\nu x}{\Leftrightarrow} x^2+1 = -\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x + x^2 = -1 \Leftrightarrow f(x) = -1.$

Ο αριθμός $-1 \notin f(\Delta)$, άρα δεν υπάρχει $\xi \in \Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = -1$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = -1 \Leftrightarrow (x^2+1)\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 0$ είναι αδύνατη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

**6. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $x_1, x_2, ..., x_\nu \in [\alpha, \beta]$.**

**Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε**

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_\nu)}{\nu}.$$

**Λύση**

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, οπότε ισχύει το Θεώρημα Μεγίστης και Ελαχίστης Τιμής, άρα η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m και ισχύει $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Επομένως για $x_1, x_2, ..., x_\nu \in [\alpha, \beta]$ έχουμε: $\left.\begin{array}{l} m \le f(x_1) \le M \\ m \le f(x_2) \le M \\ \dots\dots\dots\dots \\ m \le f(x_\nu) \le M \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$

$$\nu m \le f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_\nu) \le \nu M \Leftrightarrow m \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_\nu)}{\nu} \le M$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $m = M$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση. Έστω ότι $f(x) = c$, $c \in R$, τότε ισχύει $f(x_1) = f(x_2) =...= f(x_\nu) = c$, οπότε $m = c = M$.

  Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε

  $f(\xi) = \dfrac{c + c +...+ c}{\nu} = \dfrac{\nu c}{\nu} = c$, που ισχύει για οποιοδήποτε $\xi \in [\alpha, \beta]$.

- Αν $m < M$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$ και επειδή ο αριθμός $\dfrac{f(x_1) + f(x_2) +...+ f(x_\nu)}{\nu}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) +... + f(x_\nu)}{\nu}$.

**7. Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha) + f(\beta) + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$.**

### Λύση

Είναι $\alpha < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ και επειδή η f είναι και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ θα ισχύει $f(\alpha) < f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\beta)$, οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha) \;=\; f(\alpha) \;<\; f(\beta) \\ f(\alpha) < f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\beta) \\ f(\alpha) < f(\beta) \;=\; f(\beta) \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} 3f(\alpha) < f(\alpha) + f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta) < 3f(\beta) \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) < \dfrac{f(\alpha) + f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta)}{3} < f(\beta)$$

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, οπότε ισχύει το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών. Επειδή ο αριθμός $\dfrac{f(\alpha) + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta)}{3}$ είναι μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, θα υπάρχει ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha) + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta)}{3}$.

**8. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0\,,4)\to R$ με $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(3)=-2$ και $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=2$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0\,,1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1\,,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3\,,4)$, τότε να βρείτε:**

**α. Το σύνολο τιμών της f**

**β. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $[0\,,4)$.**

**Λύση**

**α.** Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=[0\,,1]$, οπότε είναι

  $f(\Delta_1)=[f(0)\,,f(1)]=[1\,,3]$.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[1\,,3]$, οπότε είναι

  $f(\Delta_2)=[f(3)\,,f(1)]=[-2\,,3]$.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3=[3\,,4)$, οπότε είναι

  $f(\Delta_3)=\left[f(3)\,,\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\right)=[-2\,,2)$.

  Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f:\Delta\to R$, όπου $\Delta=[0\,,4)$ είναι:

  $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=[-2\,,3]$.

**α.** Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Το $0\notin f(\Delta_1)=[1\,,3]$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο διάστημα $\Delta_1=[0\,,1]$.

- Το $0\in f(\Delta_2)=[-2\,,3]$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια λύση στο διάστημα $\Delta_2=[1\,,3]$ και μάλιστα μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2$.

- Το $0\in f(\Delta_3)=[-2\,,2)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια λύση στο διάστημα $\Delta_3=[3\,,4)$ και μάλιστα μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3$.

  Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς λύσεις στο διάστημα $[0,4)$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**41.** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta$, ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

**i.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+2x-3}{x-1} & , x<1 \\ \alpha x+11 & , x\geq 1 \end{cases}$ **ii.** $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta & , x<-1 \\ 3\alpha-1 & , x=-1 \\ 3\alpha x^2-\beta & , x>-1 \end{cases}$

**iii.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu 3x}{x} & , x<0 \\ \alpha & , x=0 \\ 2^x+3x+2 & , x>0 \end{cases}$ **iv.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha x^2+(\beta-1)x+6}{x-3} & , x\neq 3 \\ 7 & , x=3 \end{cases}$

**v.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha(x^3-8)}{x-2} & , x<2 \\ 2\alpha+\beta & , x=2 \\ \dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-4} & , x>2 \end{cases}$

**42.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{\pi-x}+2\alpha-x & , x<\pi \\ \dfrac{\alpha x}{\pi}+\beta-\pi & , x\geq\pi \end{cases}$

Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\alpha,\beta)$.

**43.** Αν για κάθε $x$ κοντά στο 0 ισχύει $\eta\mu x + x \leq f(x) \leq 8\sqrt{x+4}-16$

αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & , x\neq 0 \\ 2 & , x=0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0.

Όπου f συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το R.

**44.** Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και ικανοποιεί τις συνθήκες

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+f(x)}{x-2}=k\in R$ και $f(2)=-4$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.

**45.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu x}{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}=2$.

Αποδείξτε ότι $f(0)=0$.

**46.** Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο R για την οποία ισχύει

$xf(x)-f(x)=x^2-1$, για κάθε $x\neq 1$. Αποδείξτε ότι $f(1)=2$.

**47.** Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο R για την οποία ισχύει

$xf(x)+\eta\mu x=2x$. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης.

**48.** Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R για την οποία ισχύει:

$f(x+y)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x, y\in R$. Αν η συνάρτηση f είναι

συνεχής στο 0, αποδείξτε ότι είναι συνεχής σε όλο το R.

**49.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x}{1+2^x}, & x\leq 0\\[2mm] \dfrac{e^x}{1+e^x}, & x>0\end{cases}$

**α.** Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

**β.** Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

**50.** Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R, για την οποία ισχύουν:

Είναι συνεχής στο 1, είναι περιττή και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=10$.

Αποδείξτε ότι :

**α.** $f(1)=5$.

**β.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $-1$.

**γ.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)+5}{x+1}=10$.

**51.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση ( ως προς x), $\eta\mu x-\eta\mu a=\dfrac{\pi}{2}-x$ έχει μία

τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

**52.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)2^{x+1}=1$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

**53.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{x^{2000}+1}{x-1}+\dfrac{x^{2001}+2}{x-2}=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

**54.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-3x^2+1=0$ έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

**55.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha , \beta]$ και ισχύει $(1+\alpha^2)f(\alpha) + (1+\beta^2)f\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha , \beta]$.

**56.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $0 \le f(x) \le 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f^2(x_0) + f(x_0) = x_0^{\,2} + x_0$.

**57.** Αν α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\sigma\upsilon\nu x + \beta = x$, έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα , που δεν υπερβαίνει τον $\alpha + \beta$.

**58.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,3]$ με $f(1) \neq 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\frac{f(x_0)}{x_0-1}=\frac{f(1)+f(3)}{2}.$$

**59.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x^2+2001}=\dfrac{4x-5}{x^2-x-2}$, έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

**60.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to [\alpha,\beta]$, $\alpha\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, τέτοιο ώστε $\dfrac{f(x)}{\alpha}=\dfrac{\beta}{\xi}$.

**61.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+x-1=0$, έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 2)$.

**62.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, e]$ με $f(e) = e$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x\ln x + 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

**63.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\pi/2]$ και $f(0)= f(2)$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(\text{συν}x) = f(2 - \text{ημ}x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,\pi/2]$.

**64.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ με $f(2) \neq 6$ και ισχύει $f(1) + f(2) = 8$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε να είναι $f(x_0) = x_0^2 + x_0$.

**65.** Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο σύνολο R για την οποία ισχύει $x^2 f(x) - 5x^4 = x^2 - 2\text{ημ}x^2$, για κάθε $x \in R$.

**α.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

**β.** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

**γ.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

**66.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3}{8} - 2\text{ημ}(\pi x) + 5,\ x \in [-2, 2]$. Να εξετάσετε αν η f παίρνει την τιμή $\dfrac{11}{2}$.

**67.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0, 3). Έστω ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1} = 5$. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y = x + 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0, 1)$.

**68.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-4, 4]$ και υποθέτουμε ότι ισχύει $x^2 + [f(x) - 1]^{2004} = 17$. Αποδείξτε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-4, 4)$.

**69.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και υποθέτουμε ότι ισχύει:

$f(x) + [f(x)]^5 = x^3 + x - 2$, για κάθε $x \in R$. Αποδείξτε ότι:

**α.** Η συνάρτηση f είναι συνάρτηση 1-1.

**β.** Ισχύει $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (-1,\ 1)$.

**70.** Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει: $\left|f(x)-1\right| - \dfrac{2}{x+1} = x-1$, για κάθε $x \in (1,+\infty)$.

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(1,+\infty)$.

**71.** Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R για τις οποίες ισχύει $e^{f(x)} + g(x) = 1 - x$ για κάθε $x \in R$. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο μεταξύ των A , B .

**72.** Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, για την οποία ισχύουν $f(0) = -1$ , και $-1$, 3 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 f(2) - 5x + 13}{x^2 + 27}$.

**73.** Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [0,2]. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\ 2)$ ώστε να ισχύει $f(\xi) = \dfrac{f(0) + f(1) + f(2)}{3}$.

**74.** Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [α,β].

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και $x_1 < x_2 < x_3 \in [\alpha,\beta]$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\ \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) = 6f(\xi)$.

**75.** Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα (0,7) για την οποία ισχύει $x^2 + f^2(x) = 7x$, για κάθε $x \in (0,\ 7)$.

**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.** Η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες στο διάστημα (0,7).

**ii.** Η f έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα (0, 7).

**β.** Αν είναι γνωστό ότι ισχύει $f(1) = -\sqrt{6}$ , να βρεθεί ο τύπος της f.

**γ.** Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

## Κεφάλαιο $1^{Ο}$

## ΙΙ. ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | **Λ** | **11.** | **Σ** | **21.** | **Λ** | **32.** | **Σ** |
| **2.** | **Λ** | **12.** | **Λ** | **22.** | **Σ** | **33.** | **Σ** |
| **3.** | **Λ** | **13.** | **Σ** | **23.** | **Σ** | **34.** | **Λ** |
| **4.** | **Σ** | **14.** | **Λ** | **24.** | **Σ** | **35.** | **Σ** |
| **5.** | **Σ** | **15.** | **Σ** | **25.** | **Σ** | **36.** | **Σ** |
| **6.** | **Λ** | **16.** | **Σ** | **26.** | **Σ** | **37.** | **Σ** |
| **7.** | **Λ** | **17.** | **Λ** | **27.** | **Λ** | **38.** | **Λ** |
| **8.** | **Λ** | **18.** | **Σ** | **28.** | **Σ** | **39.** | **Σ** |
| **9.** | **Σ** | **19.** | **Σ** | **29.** | **Σ** | | |
| **10.** | **Λ** | **20.** | **Σ** | **30.** | **Σ** | | |
| | | | | **31.** | **Σ** | | |

### Απαντήσεις - υποδείξεις στις ασκήσεις

**22.** **α.** $+\infty$ **β.** Δεν υπάρχει **γ.** $+\infty$ **δ.** $-\infty$
**ε.** $+\infty$ **στ.** $+\infty$ **ζ.** $-\infty$ **η.** Δεν υπάρχει

**24.** $\alpha = 1$ , $\beta = -2$ ( Να μη ξεχνάμε την επαλήθευση ).

**25.** $\alpha = 6$ ( Να μη ξεχνάμε την επαλήθευση ).

**26.** $\alpha = 4$ ( Να μη ξεχνάμε την επαλήθευση ).

**27.** $\lambda = 5$ ( Να μη ξεχνάμε την επαλήθευση ).

**28.** $\lambda = -9$ ( Να μη ξεχνάμε την επαλήθευση ).

**29.** $\alpha = 4$ , $\beta = 22$ ( Να μη ξεχνάμε την επαλήθευση ).

**32.** Αν $0 < \alpha < 2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} = -4$, αν $\alpha = 2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} = -1$, αν $\alpha > 2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} = \alpha$

**35.** Αν $\mu > -1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} = +\infty$ , αν $\mu = -1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} = \frac{3}{2}$, αν $\mu < -1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$

**36.** $\lambda = -3$ , $\mu = -1$

**37.** $\alpha = -1$ , $\beta = -1$

**38.** $\alpha = 1/2$ , $\beta=2$

**39.** $\alpha = 1$ , $\beta = 4$

**41.** **i.** $\alpha = -6$ **ii.** $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ **iii.** $\alpha = 3$ **iv.** $\alpha = 3$ , $\beta = -10$ **v.** $\alpha = 1/6$, $\beta = 5/3$ .

**42.** $x - y + 1 = 0$

**47.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-\eta\mu x}{x} & , \ x\neq 0\\ 1 & , \ x=0\end{cases}$

**48.** Πρέπει $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$ , για κάθε $x_o\in R$.

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\lim\limits_{x\to x_o} f(x-x_o+x_o)$ , εφαρμόζουμε τη συναρτησιακή σχέση κ.λ.π.

**51 , 52 , 53.** Εργαζόμαστε με το θεώρημα Bolzáno .

**54.** Κάνουμε διάσπαση του διαστήματος και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzáno .

**55.** Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzáno.

**56 , 57 , 58 , 59 , 60.** Θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzáno.

**61.** Το ακριβώς μία ρίζα το αποδεικνύουμε με την μονοτονία …

**62 , 63 , 64.** Θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzáno.

**65. α.** $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{2\eta\mu x^2}{x^2}+5x^2 & , \ x\neq 0\\ -1 & , \ x=0\end{cases}$ **β.** $+\infty$

**66.** Αρκεί να υπάρχει $x_o = \in (-2, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = 11/2$ … εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzáno. (Μπορούμε να εργαστούμε και με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών ).

**67.** Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x + 1$έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

**68.** Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο. Τότε θα υπάρχουν $x_1$ $x_2\in (-4, 4)$ τέτοια ώστε $f(x_1)$ $f(x_2) < 0$. (Εργαζόμαστε με το θεώρημα Bolzáno και καταλήγουμε σε άτοπο).

**69. α.** Έστω $f(x_1) = f(x_2)$ άρα και $\left[f(x_1)\right]^5=\left[f(x_2)\right]^5$ προσθέτουμε και προκύπτει

$x_1^3+x_1-2=x_2^3+x_2-2$ κ. λ. π.

**β.** Αποδεικνύουμε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-1, 1)$ και για $x = 0$ είναι $f(0) < 0$.

**72.** Βρίσκουμε $f(2) < 0$ . Το όριο είναι $-\infty$ .

**73.** Εργαζόμαστε με το Θ.Ε.Τ. ( Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών ).

**75. β.** $f(x)=-\sqrt{7x-x^2}$ , $x\in(0,7)$.

**ΣΧΟΛΙΟ:**

Ως γνωστόν το $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\eta\mu x$ δεν ορίζεται . Το $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$ ορίζεται και είναι ίσο με το μηδέν.

**Απόδειξη:**

Ισχύει $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\leq\left|\dfrac{1}{x}\right|$ άρα $-\left|\dfrac{1}{x}\right|\leq\dfrac{\eta\mu x}{x}\leq\left|\dfrac{1}{x}\right|$ και επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\dfrac{1}{x}\right|=0$ σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

# ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΦ. 1Ο
## ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

***Βασικές προτάσεις και παρατηρήσεις στο***

***1ο Κεφάλαιο Ανάλυσης του σχολικού βιβλίου.***

**Βασικές Προτάσεις:**

**1. Μονοτονία και σύνθεση συναρτήσεων.**

Όταν συνθέτουμε δύο συναρτήσεις με το ίδιο είδος μονοτονίας η σύνθεση που προκύπτει είναι γν. αύξουσα ,ενώ αν έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας προκύπτει γν. φθίνουσα συνάρτηση. Τα συμπεράσματα αυτά φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $f$ | $g$ | $fog$ | $gof$ |
|---|---|---|---|
| $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ |
| $\searrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ |
| $\nearrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ |
| $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ |

**Απόδειξη**

Έστω f και f γν. αύξουσες συναρτήσεις των οποίων ορίζεται η σύνθεση.Τότε έχουμε:

Έστω $x_1, x_2 \in A_{fog}$ με

$x_1 < x_2 \xrightarrow{g\nearrow} g(x_1) < g(x_2) \xrightarrow{f\nearrow} f(g(x_1)) < f(g(x_2))$ .Άρα $fog \nearrow$.

Ομοίως αποδεικνύονται και τα υπόλοιπα.

**2. Οι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν γραφικές παραστάσεις που είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = \chi$ .**

**Απόδειξη:**

Έστω σημείο Μ (α, β) της $C_f$ τότε ισχύει: $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow \alpha = f^{-1}(\beta)$. Δηλαδή το σημείο Μ΄( β , α) ανήκει στη $C_{f^{-1}}$ τα Μ , Μ΄ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = \chi$

.

**3. Αν οι $C_f$ , $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο τότε αυτό βρίσκεται στη διχοτόμο y =x.**

**Απόδειξη**

Αν υπήρχε Μ(α, β) κοινό σημείο των $C_f$ , $C_{f^{-1}}$ και το Μ δεν ανήκε στην ευθεία $y = x$ τότε θα ήταν $\alpha \neq \beta$ οπότε οι $C_f$ , $C_{f^{-1}}$ θα είχαν και άλλο κοινό σημείο το Ν(β, α) (το συμμετρικό του Μ ως προς την y = x) άτοπο αφού οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν μόνον ένα κοινό σημείο.

**4. Αν ένα σημείο ανήκει στην $C_f$ και στη διχοτόμο y = x τότε το σημείο αυτό ανήκει και στη $C_{f^{-1}}$.**

**Απόδειξη**

Αν Μ(α, β) κοινό σημείο των $C_f$ και y = x τότε είναι β = f(α) και

$\beta = \alpha$, οπότε $f^{-1}(\beta)=\alpha \overset{\alpha=\beta}{\Leftrightarrow} f^{-1}(\alpha)=\beta \Leftrightarrow M(\alpha,\beta)\in C_{f^{-1}}$.

**5. α. Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.**

**Απόδειξη**

**α.** Έστω f γν. αύξουσα .

Υποθέτουμε ότι η $f^{-1}$ δεν είναι γν. αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ με

$y_1<y_2$ για τα οποία θα ισχύει $f^{-1}(y_1)\ge f^{-1}(y_2)\Rightarrow f\left(f^{-1}(y_1)\right)\ge f\left(f^{-1}(y_2)\right)$ (επειδή η f γν. αύξουσα) άρα $y_1 \ge y_2$ ΑΤΟΠΟΝ.

**β.** Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και αντιστρέφεται τότε και η αντίστροφή της, είναι συνεχής στο f(Δ).

**ΠΡΟΣΟΧΗ!!!** Αν η **f** είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων και αντιστρέφεται **δεν εξασφαλίζεται** η συνέχεια της $\mathbf{f^{-1}}$.

**6. Αν η σύνθεση της g με την f, δηλαδή η fog είναι 1-1 τότε:**

**1. Η g είναι απαραιτήτως 1-1. 2. Η f δεν είναι απαραιτήτως 1-1.**

**Απόδειξη**

**1.** Έστω $x_1, x_2 \in A_g$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Επειδή η f είναι συνάρτηση και ορίζεται η fog , έπεται ότι $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ και επειδή η fog είναι 1-1 προκύπτει $x_1 = x_2$. Άρα η g είναι 1-1.

**2.** Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Αν υπάρχουν $\omega_1, \omega_2 \in A_g$ τέτοια ώστε $g(\omega_1) = x_1$ και $g(\omega_2) = x_2$, προκύπτει $f(g(\omega_1)) = f(g(\omega_2))$ και επειδή η fog είναι 1-1 προκύπτει $\omega_1 = \omega_2$. Άρα $g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2)$ και επειδή η $g^{-1}$ είναι 1-1 προκύπτει $x_1=x_2$ δηλαδή η f είναι 1-1. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η f είναι 1-1 Αν υπάρχουν $\omega_1, \omega_2 \in A_g$ τέτοια ώστε $g(\omega_1) = x_1$ και $g(\omega_2) = x_2$ (δηλαδή εξαρτάται από το σύνολο τιμών της g).

Θεωρείστε ως αντιπαράδειγμα , τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$ κ.λ.π.

**7. Αν η f είναι αντιστρέψιμη και περιττή, τότε και η $f^{-1}$ είναι περιττή.**

## Απόδειξη

Από την υπόθεση η f είναι αντιστρέψιμη οπότε για κάθε $y \in f(A)$ υπάρχει μοναδικό $x \in A$ ώστε $f(x) = y$ (1). Επίσης η f είναι περιττή, τότε για κάθε $x \in A$ θα είναι και

το $-x \in A$, $f(-x) = -f(x) \overset{(1)}{=} -y$ (2).

Επειδή $f(-x) \in f(A)$. Από την (2) προκύπτει $-y \in f(A)$.

Έτσι

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(f(-x)) = (f^{-1} \circ f)(-x) = -x \qquad (3)$$

Αλλά ισχύει: $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ τότε από την (3) προκύπτει ότι $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$. Πράγματι η $f^{-1}$ είναι περιττή.

**Εύκολα διαπιστώνουμε ότι:**

**α. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f δεν είναι «1-1».**

**β. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.**

**γ. Αν η f είναι «1-1» τότε η f δεν είναι άρτια.**

**δ. Τα κοινά σημεία των $C_f$, $C_{f^{-1}}$ εφόσον υπάρχουν έχουν συντεταγμένες που προσδιορίζονται από τις λύσεις του συστήματος**

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$ **(Σ).** Το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με τα συστήματα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \ (\Sigma_1) \quad \text{και} \quad \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \ (\Sigma_2)$$

Αν ξέρουμε τον τύπο της f επιλύουμε το $(\Sigma_1)$ ενώ αν ξέρουμε τον τύπο της $f^{-1}$ επιλύουμε το $(\Sigma_2)$.

**ΠΡΟΣΟΧΗ!**

Τα κοινά σημεία των $C_f$, $C_{f^{-1}}$ δεν βρίσκονται πάντοτε στη διχοτόμο $y = x$. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, οπότε όλα τα σημεία των $C_f$, $C_{f^{-1}}$ είναι κοινά αλλά μόνο δύο από αυτά τα $(1, 1)$ και $(-1, -1)$ ανήκουν στην $y = x$. Επίσης η $f(x) = \frac{-1}{x}$ έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x) = \frac{-1}{x}$ οπότε οι $C_f$, $C_{f^{-1}}$ έχουν όλα τους τα σημεία κοινά αλλά κανένα δεν ανήκει στην $y = x$.

Αν όμως η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** τότε αποδεικνύεται ότι οι $C_f$, $C_{f^{-1}}$ εφόσον έχουν κοινά σημεία, θα βρίσκονται στη διχοτόμο $y = x$. Δηλαδή ισχύει:

**8. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο Α τότε ισχύει η ισοδυναμία:**

$$\mathbf{f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x,\ \ x\in B=A\cap f(A)}.$$

**Απόδειξη:**

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α θα είναι 1-1 άρα θα υπάρχει η συνάρτηση $f^{-1}$ η οποία θα είναι και αυτή γνησίως αύξουσα στο f(A).

- Αν $x\in B$ και $f(x)=x$ προκύπτει $x=f^{-1}(x)$ άρα $f(x)=f^{-1}(x)$.
- Αν $x\in B$ και $f^{-1}(x)=f(x)$ θα δείξουμε ότι $f(x)=x$ .

Έστω $f(x)>x$ τότε $f^{-1}(f(x))>f^{-1}(x)$ ή $x>f^{-1}(x)$ ή $x>f(x)$ άτοπο.

Έστω $f(x)<x$ τότε $f^{-1}\left(f(x)\right)<f^{-1}(x)$ ή $x<f^{-1}(x)$ ή $x<f(x)$ άτοπο. Άρα $f(x)=x$.

**Σχόλιο**

Αν μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε ορίζεται η $f^{-1}:f(A)\to\mathbb{R}$, αλλά πολλές φορές ενώ γνωρίζουμε ότι υπάρχει η $f^{-1}$ δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τον τύπο της. Αυτό συμβαίνει γιατί η εξίσωση $y = f(x)$ δεν μπορεί να λυθεί αλγεβρικά πάντα ως προς x. Για παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε τη συνάρτηση $f(x)=x^5+x-1,\ \ x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι γνήσια αύξουσα άρα είναι και «1-1» οπότε ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης $f^{-1}:f(A)\to\mathbb{R}$. Όμως δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της, αφού η εξίσωση $y=x^5+x-1$, δεν λύνεται αλγεβρικά ως προς x. Επομένως, για να βρούμε τα κοινά σημεία των $C_f$ και $C_{f^{-1}}$ χρησιμοποιούμε την προηγούμενη πρόταση.

Έτσι έχουμε: $f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow x^5+x-1=x\Leftrightarrow x=1$.

**Παρατηρήσεις**

**1.** Αν f συνάρτηση με π. ορισμού το Α και $x_1, x_2\in A$ με $x_1=x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$

**2.** Έστω συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού Α , Β αντιστοίχως. Στις πράξεις με τις συναρτήσεις f, g **πρώτα βρίσκουμε** το πεδίο ορισμού και μετά τον τύπο που προκύπτει. Αν $A\cap B=\varnothing$ , δεν ορίζεται πράξη.

Ιδιαίτερη προσοχή στη διαίρεση $\frac{f}{g}$ όπου πρέπει $g\neq 0$.

**3.** Γενικά **δεν** ισχύει: $fog=gof$ .

**4.** Η ισότητα $f^2(x)=ημ^2x$ έχει άπειρες λύσεις π.χ $f(x)=\eta\mu x,\quad f(x)=-\eta\mu x,\quad f(x)=|\eta\mu x|$

$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x\ , & x>0\\ -\eta\mu x\ , & x\le 0\end{cases}$ κ.τ.λ.

**5.** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ( φθίνουσα) σε δύο διαστήματα Α και Β του πεδίου ορισμού της , **δεν σημαίνει** ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα) και στην ένωση των διαστημάτων. π.χ. $f(x)=\frac{2}{x}$.

**6.** Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R. Η ισότητα $f(x)\cdot g(x)=0$ **δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη** $f(x)=0$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in R$.

**7.** Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 τότε η εξίσωση $y=f(x)$ **έχει ακριβώς μία λύση** για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της f.

**8.** Κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x τέμνει τη γραφική παράσταση μιας 1–1 συνάρτησης **το πολύ** σε ένα σημείο.

**9.** Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση στο π. ορισμού της είναι και 1–1.
Το αντίστροφο **δεν ισχύει πάντα.** Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1 αλλά όχι γνησίως μονότονες στο πεδίο ορισμού τους .

π .χ η $f(x)=\frac{1}{x}$.

**10. i.** Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$ , όπου $\alpha\notin Z$ , ορίζεται για $x\ge 0$ όταν $\alpha>0$ και για $x>0$ όταν $\alpha<0$.

**ii.** Είναι <u>**λάθος**</u> η ισότητα $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ .

Το <u>**σωστό**</u> είναι $\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{|x|^2}=|x|^{\frac{2}{3}}$ ή $\sqrt[3]{x^2}=\left(x^2\right)^{\frac{1}{3}}$ .

**11. Άρτια συνάρτηση**

- Σε συμμετρικά ως προς το Ο ( αρχή των αξόνων) διαστήματα η f έχει αντίθετο είδος μονοτονίας.
- Αν η f παρουσιάζει στο α μέγιστο τότε στο – α παρουσιάζει πάλι μέγιστο, το f(α). (αντιστοίχως για το ελάχιστο).

**Περιττή συνάρτηση**:

- Σε συμμετρικά ως προς το Ο ( αρχή των αξόνων) διαστήματα η f έχει το ίδιο είδος μονοτονίας
- Αν η f παρουσιάζει στο α μέγιστο τότε στο – α παρουσιάζει ελάχιστο, το –f(α).

**Δηλαδή η άρτια συνάρτηση διατηρεί τα ακρότατα και η περιττή την μονοτονία.**

**12.** Οι πράξεις στα όρια εφαρμόζονται **εφόσον υπάρχουν** τα επιμέρους όρια .

**13.** Μπορεί να υπάρχει το όριο μιας πράξης συναρτήσεων χωρίς να υπάρχουν τα όρια των επιμέρους συναρτήσεων. **Π.χ.**

Οι συναρτήσεις $f(x) = 2x + \frac{1}{x-1}$ και $g(x) = x^2 - \frac{1}{x-1}$ **δεν έχουν όριο** στο $x_o = 1$.

Το όριο όμως του αθροίσματός των υπάρχει :

**Πράγματι** $\lim\limits_{x\to1}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to1}(2x + x^2) = 3$

**14.** Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο $x_o$ και ισχύει: $\underline{f(x) < g(x)}$ **κοντά στο** $x_o$,

τότε: $\underline{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ .

**15.** **Δεν υπάρχουν** τα $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ημx$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} συνx$ .

**Απόδειξη**

**Α.** Έστω η συνάρτηση f(x)=συνx .

**α.** Αποδεικνύουμε ότι ισχύει $f(2x) = 2f^2(x) - 1$

**β.** Αν υποθέσουμε ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ χρησιμοποιώντας το (α) βρίσκουμε

$2l^2 - l - 1 = 0$, από το οποίο προκύπτει $l = 1$ ή $l = \frac{-1}{2}$, που είναι άτοπο ,διότι αν υπάρχει το όριο είναι μοναδικό.

**Β.** Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = ημx$ , χρησιμοποιούμε τον τύπο

$συν2x = 1 - 2ημ^2x$ ο οποίος μπορεί να γραφεί και $ημ(\frac{π}{2}+2x) = 1 - 2ημ^2x$ ,

άρα ισχύει $f(\frac{π}{2} + 2x) = 1 - 2f^2(x)$ και θεωρώντας ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ καταλήγουμε σε άτοπο.

**16.** Μια πράξη συναρτήσεων μπορεί να είναι συνεχής στο $x_o$ χωρίς να είναι συνεχής στο $x_o$ οι επιμέρους συναρτήσεις.

**17.** Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano **δεν ισχύει.**

Δηλαδή η ύπαρξη μιας ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0 στο [α , β] **δεν εξασφαλίζει** την συνέχεια της συνάρτησης f στο [α , β] ούτε ότι οι τιμές $f(α)$, $f(β)$ είναι ετερόσημες.

**18.** Αν μια τουλάχιστον από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano **δεν ισχύει,** αυτό **δεν σημαίνει κατ' ανάγκην** ότι δεν υπάρχει $x_o \in (α , β)$ ώστε $f(x_o) = 0$.

**19.** Αν μια συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής** σε ένα διάστημα [α , β ] **δεν παίρνει απαραίτητα** όλες τις τιμές μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$.

**20.** Μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] **δεν είναι κατ' ανάγκη** συνεχής στο α ή στο β.

# ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΤΟΥ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

## Θέμα 1ο

Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης και συνεχούς συνάρτησης $f: R \to R$ διέρχεται από τα σημεία Α( 2 , 5 ) και Β ( – 1 , 3 ).

**i.** Να συμπληρώσετε τις ισότητες: f(2) = …., f(–1) = ….

**ii.** Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

**iii.** Εξετάστε αν η f αντιστρέφεται

**iv.** Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(2x-1)=f(5)$ και $f(f(x))=f(5)$

**v.** Να συμπληρώσετε τις ισότητες: $f^{-1}(5)=....$, $f^{-1}(3)=......$

**vi.** Να λύσετε την εξίσωση: $f(3+f^{-1}(x+1))=5$

## Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x+1$

**i.** Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το $f^{-1}(3)$

**ii.** Αποδείξτε ότι η $f^{-1}$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

**iii.** Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x)=35$ , $f^{-1}(x)=2$

**iv.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f$ και $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y=x$.

**v.** Να λύσετε την εξίσωση : $(2\eta\mu x-1)^5+2\eta\mu x=1$

**vi.** Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(f^{-1}(x+1)-1)<f^{-1}(1)$.

## Θέμα 3ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει:

$$x \cdot f(x)+\eta\mu x = x^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{x} \quad , \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

**i.** Να βρείτε τον τύπο της f για κάθε $x \in R$.

**ii.** Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

**iii.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x)-\frac{x}{2x+1}=0$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

**Θέμα 4ο**

Αν η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι συνεχής και ισχύει:

$\left(f(x)-1\right)\cdot\left(f(x)+3\right)=0$, για κάθε $x\in R$.,

**i.** Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

**ii.** Αποδείξτε ότι : $f(x)=1$ , για κάθε $x\in R$.

ή

$f(x)=-3$ , για κάθε $x\in R$.

**Θέμα 5ο**

Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο διάστημα [ 1 , 5 ] και για την οποία ισχύουν : $f(5)=1$ και $f(x)\cdot f\left(f(x)\right)=7$ για κάθε $x\in[1,\ 5]$ .

**i.** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(1)\cdot x^3-2x+1}{f(5)\cdot x^2+3}$

**ii.** Αν $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=7$ αποδείξτε ότι η $C_f$ διέρχεται από σημείο με τεταγμένη 3.

**iii.** Έστω η συνάρτηση $g(x)=x\cdot f(x)-13συν(\pi x),\quad x\in[1,\ 5]$

Αποδείξτε ότι η $C_g$ τέμνει σε ένα τουλάχιστον σημείο τον άξονα xx με τετμημένη στο διάστημα ( 4 , 5 ).

**Θέμα 6ο**

Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [α , β ] και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha^2+if\alpha$, $w=\beta^2-if(\beta)$ με $\alpha\beta\neq 0$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)\neq 0$, για τους οποίους ισχύει: $\left|\overline{w}+z\right|=\left|w-\overline{z}\right|$ .

**i.** Αποδείξτε ότι ο αριθμός w·z είναι φανταστικός.

**ii.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(\alpha)x^3-f(\beta)x+5}{f(\beta)x^2+f(a)x-3}$ .

**iii.** Αποδείξτε ότι η $C_f$ τέμνει τον άξονα χ΄χ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

**Θέμα 7ο**

Έστω μιγαδικός αριθμός $z=\kappa+\lambda i$ με $\kappa\neq 0$ , $\lambda\neq 0$ .

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\ \beta]\to R$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\ \beta]$ .

Θεωρούμε ότι $z+\dfrac{1}{z}=f(\alpha)$. Αποδείξτε ότι:

**i.** $|z| = 1$.

**ii.** Ο αριθμός $w = \dfrac{i\cdot(i+z)}{i-z}$ είναι πραγματικός .

**iii.** Η εξίσωση $x^2 f(\alpha)+xf(\beta)-f(\beta)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ .

**Θέμα 8ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1$, $z_2$ για τους οποίους ισχύει: $|z_1|=|z_2|=1$.

**i.** Αποδείξτε ότι $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1}$ .

**ii.** Να βρεθεί ο γεωμ. τόπος των εικόνων του μιγαδικού $w = z_1+2$ .

**iii.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x\cdot z_1|-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ \alpha & , x=1 \end{cases}$

να υπολογίσετε τον $\alpha \in R$ αν η f είναι συνεχής στο $x_o= 1$.

**iv.** Έστω η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x\cdot z_1+z_2|-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Αν η g είναι συνεχής στο $x_o= 0$ αποδείξτε ότι $z_1 = z_2$ .

Αν η g είναι συνεχής στο $x_o = 0$ αποδείξτε ότι $z_1 = z_2$ .

**Θέμα 9ο**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει: $f^3(x)+f(x)=x+2$, για κάθε $x\in R$.

**i.** Αποδείξτε ότι η f είναι 1 - 1

**ii.** Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη της f έχει τον τύπο $f^{-1}(x)=x^3+x-2$ .

**iii.** Με απαγωγή σε άτοπο αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

**iv.** Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_f$ με τους άξονες x΄x και y΄y .

**v.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f$ και $C_{f^{-1}}$ .

**Θέμα 10ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha, \beta]\to R$ συνεχής στο $[\alpha , \beta ]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός $z$ με $\mathrm{Re}(z)\cdot \mathrm{Im}(z)\neq 0$ και $|\mathrm{Re}(z)|>|\mathrm{Im}(z)|$.

Αν $z+\frac{1}{z}=f(\alpha)$ και $z^2+\frac{1}{z^2}=f^2(\beta)$ , αποδείξτε ότι:

**i.** $|z|=1$

**ii.** $f^2(\beta)<f^2(\alpha)$

**iii.** η εξίσωση $x^3 f(\alpha)+f(\beta)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (–1 , 1 )

*( ΘΕΜΑ Ιούλιος 2004 )*

**Θέμα 11ο**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο [α , β ] με $0<\alpha<\beta$ και έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha^2+if(\alpha)$ και $\omega=\beta^2-if(\beta)$. Αν για τους z και ω ισχύει $|z+\overline{\omega}|<|\overline{z}-\omega|$ αποδείξτε ότι:

**i.** $\mathrm{Re}(z\cdot\omega)<0$

**ii.** Υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\ \beta)$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=0$

**Θέμα 12ο**

Έστω η συνεχής στο [ α , β ] συνάρτηση f και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+i\cdot f(\alpha)$ και $\omega=\beta+i\cdot f(\beta)$ για τους οποίους ισχύει: $|z+\omega|=|z-\omega|$

Αποδείξτε ότι :

**i.** $\mathrm{Re}(\overline{z}\cdot\omega)=0$

**ii.** Αν $\beta<0$ , υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει: $f(x_o)=0$.

**Θέμα 13ο**

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=e^{\alpha}+if(\alpha)$ και $z_2=f(\beta)+ie^{\beta}$. Αν $\mathrm{Im}(z_1)\cdot\mathrm{Re}(z_2)\neq 0$ και $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ αποδείξτε ότι:

**i.** $\frac{e^{\alpha}}{f(\alpha)}+\frac{e^{\beta}}{f(\beta)}=0$ ,

**ii.** Η $C_f$ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_o\in(\alpha,\beta)$.

*(ΘΕΜΑ )*

**Θέμα 14ο**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x=x+i\cdot f(x)$, $x\in R$.

**α.** Αν $\mathrm{Im}(z_x)=1$ για κάθε $x\in R$ αποδείξτε ότι:

**i.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|z_x|-\text{συν}x}{[\text{Re}(z_x)]^2}=1$

**ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(|z_x|-x)=0$

**β.** Αν $|z_x-1|=1$ , $x\in[0,2]$ τότε:

**i.** Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

**ii.** Να βρείτε τον τύπο της f όταν $\text{Im}(z_x)>0$ .

**iii.** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f. ***( ΘΕΜΑ )***

**Θέμα 15ο**

Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [ 0 , 1 ], και τιμές στο $R^*$. Θεωρούμε ότι το σημείο Α ( 1 , 1 ) ανήκει στη $C_f$

**i.** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{x}+2,\ x\in(0,1)$ είναι γνησίως αύξουσα.

**ii.** Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της $g$ είναι το διάστημα $(-\infty,2)$.

**iii.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x}=1+2f(x)$ έχει μοναδική λύση στο ( 0 , 1 ).

**Θέμα 16ο**

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει: $x\cdot f(x)+3\etaμx=x^2$, για κάθε x∈R.

**i.** Να βρείτε τον τύπο της f .

**ii.** Να αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

**iii.** Να αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=e^{-x}$ έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα.

***(ΘΕΜΑ)***

**Θέμα 17ο**

**Α.** Έστω οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f,g:R\to R$ .

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $f+g$ και $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσες.

**Β.** **α.** Να εξετάσετε τη συνάρτηση $h(x)=x+\ln x+1$ ως προς τη μονοτονία.

**β.** Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνησίως αύξουσα και $f(x)>0$ για κάθε x∈R , αποδείξτε ότι:

**i.** Η συνάρτηση $\Phi(x)=f(x)+\ln(f(x))+1,\ x\in R$ είναι αντιστρέψιμη.

**ii.** Αν η $C_f$ τέμνει τον άξονα y΄y στο 1 , να λύσετε την ανίσωση $f(x)<e^{1-f(x)}$

**Θέμα 18ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ \alpha + 1 & x = 0 \end{cases}$

**i.** Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

**ii.** Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

**iii.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση $(f(x))^{2005} = \kappa$ , έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα για κάθε $\kappa \in R$.

**Θέμα 19ο**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύουν:
$f(f(x)) - f(x) = 3$ και $f(1) = 4$ .

**i.** Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(1) \cdot x^3 + 2x - 1}{f(4) \cdot x^2 - x + 2}$

**ii.** Αν $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 8$, αποδείξτε ότι η $C_f$ διέρχεται από το σημείο με τεταγμένη 6 .

**iii.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x \cdot f(x) - 30 \cdot \text{συν}(\pi x)$ .

Αποδείξτε ότι η $C_g$ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα ( 4 , 7).

**iv.** Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_o \in (1, 7)$ , τέτοιο ώστε να ισχύει

$$10 \cdot f(x_0) = 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + 5 \cdot f(5)$$

**Θέμα 20ο**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^2 + \beta x - 12, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ \alpha x + \beta , & x > 1 \end{cases}$ όπου $\alpha , \beta \in R$

A) Να βρεθούν οι τιμές των α , β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

B) Με δεδομένο ότι η f είναι συνεχής και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ,

**i.** Να βρεθεί η συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$, όπου $g(x) = \ln(x - 1)$.

**ii.** Αποδείξτε ότι η $C_h$ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο.

**iii.** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\Phi(x) = (f(x))^{2005}$ και η ευθεία $y = \kappa$, $\kappa \in R$

έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο για κάθε $\kappa \in R$.

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

## ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΤΟΥ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

### Θέμα 1ο

**i.** $f(2)=5,\ \ f(-1)=3$.

**ii.** Αφού η συνάρτηση $f$ είναι γν. μονότονη και ισχύει $2>-1 \Rightarrow f(2)>f(-1)$ είναι γν. αύξουσα , άρα και 1-1 επομένως αντιστρέφεται.

**iv.** $x=3, \quad x=2$.

**v.** $f^{-1}(5)=2\,, \quad f^{-1}(3)=-1$.

**vi.** $x=2$.

### Θέμα 2ο

**i.** Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Ισχύει $f(1)=3 \Leftrightarrow 1=f^{-1}(3)$.

**ii.** Η αντίστροφη μιας γν. μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας. (Βλέπε παρατήρηση 11 σελ. 41 ).

**iii.** $f(x)=35 \Leftrightarrow f(x)=f(2)$ και επειδή η συνάρτηση f είναι 1-1 προκύπτει $x=2$.

$f^{-1}(x)=2 \Leftrightarrow x=f(2) \Leftrightarrow x=35$.

**iv.** Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y=x \\ y=x^5+x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots\ x=-1$.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**

Αν η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα ,τα κοινά σημεία της $C_f$ και της $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται στην ευθεία $y=x$.

**v.** Θέτουμε $2\eta\mu x-1=\omega$ οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$f(\omega)=1 \Leftrightarrow f(\omega)=f(0) \Leftrightarrow \omega=0$.

Βρίσκουμε $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}, \quad x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\,,\ \kappa\in Z$.

**vi.** Η συνάρτηση $f^{-1}$ είναι γν. αύξουσα άρα η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$f^{-1}(x+1)-1<1 \Leftrightarrow f^{-1}(x+1)<2 \Leftrightarrow f^{-1}(x+1)<f^{-1}(35) \Leftrightarrow x<34$.

### Θέμα 3ο

**i)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}-\eta\mu x}{x} & ,\ x\neq 0 \\ -1 & ,\ x=0 \end{cases}$ Αφού η f είναι συνεχής ισχύει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

**iii.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-\dfrac{x}{2x+1}$. Είναι $h(0)=-1, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\dfrac{1}{2}$.

Άρα εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στο διάστημα [0,M], όπου M ένας πολύ μεγάλος θετικός αριθμός.

**Θέμα 4ο**

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή.

Για $x = x_1$ από τη δοθείσα σχέση προκύπτει $f(x_1) = 1$ ή $f(x_1) = -3$. Δηλαδή οι αριθμοί $-3$ και $1$ ανήκουν στο σύνολο τιμών της συνάρτησης. Αφού η f είναι συνεχής σύμφωνα με το θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών κάθε αριθμός μεταξύ των $-3$ και $1$ θα είναι εικόνα κάποιου $x_o$. Έστω $f(x_o) = 0$. Άρα από τη δοθείσα προκύπτει $\left(f(x_o) - 1\right)\left(f(x_o) + 3\right) = 0$ δηλαδή $(0 - 1)(0 + 3) = 0$ άτοπον. Επομένως η συνάρτηση είναι σταθερή. Άρα $f(x) = -3$ για κάθε $x \in R$ ή $f(x) = 1$ για κάθε $x \in R$.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Βλέπε παρατήρηση 6 σελ. 40.

**Θέμα 5ο**

**i.** Για $x = 5$ από τη δοθείσα προκύπτει $f(1) = 7$. Άρα το όριο το βρίσκουμε $-\infty$.

**ii.** Από το θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών προκύπτει ότι θα υπάρχει $x_1 \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 3$, αφού το 3 ανήκει στο διάστημα (1, 7) από το οποίο παίρνει τιμές η συνάρτηση.

**iii.** Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_o \in (4,5)$ τέτοιο ώστε $g(x_o) = 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano. Για τον υπολογισμό του $g(4)$ εργαζόμαστε ως εξής: Το $4 \in (1,7)$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $x_o \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε

$f(x_o) = 4$ και από τη δοθείσα προκύπτει $f(x_o) f\left(f(x_o)\right) = 7 \Leftrightarrow 4f(4) = 7 \Leftrightarrow f(4) = \frac{7}{4}$

κ.λ.π.

**Θέμα 6ο**

**i.** Υψώνουμε στο τετράγωνο την ισότητα $|\overline{w}+z| = |w - \overline{z}|$ και μετά τις πράξεις προκύπτει $wz = -\overline{wz}$, άρα ο αριθμός $wz$ είναι φανταστικός.

**ii.** Αν αντικαταστήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς στην ισότητα $wz = -\overline{wz}$ βρίσκουμε $f(\alpha)f(\beta) = -\alpha^2\beta^2 < 0$, άρα το όριο είναι $+\infty$.

**iii.** Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα [α,β].

**Θέμα 7ο**

**i.** Επειδή το f(α) είναι πραγματικός αριθμός θα είναι $z + \frac{1}{z} \in R$ άρα

$z + \frac{1}{z} = \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |z| = 1$. (Είναι $z \neq \overline{z}$ από την υπόθεση).

**ii.** Αρκεί να δείξουμε ότι $w = \overline{w}$ ( λαμβάνουμε υπόψη ότι $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$ ).

**iii.** Επειδή η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, διατηρεί το πρόσημό της. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στο διάστημα [0,1] για τη συνάρτηση

$h(x) = x^2 f(\alpha) + xf(\beta) - f(\beta)$. κ.λ.π.

**Θέμα 8ο**

**ii.** Κύκλος με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα ρ=1.
**iii.** $\alpha = 1$

**iv)** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|xz_1 + z_2| - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|xz_1 + z_2|^2 - 1}{x\left(|xz_1 + z_2| + 1\right)} = \ldots = \dfrac{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2}{2}$.

Πρέπει $\dfrac{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z_1 = z_2$.

**Θέμα 9ο**

**i.** $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2)$ , προσθέτουμε κατά μέλη και προκύπτει

$x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

**ii.** Εφαρμόζουμε την ισοδυναμία $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

**ii.** Έστω ότι η συνάρτηση δεν είναι γν. αύξουσα. Τότε για $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) \geq f(x_2) \\ f^3(x_1) \geq f^3(x_2) \end{cases}$

προσθέτουμε κατά μέλη και προκύπτει $x_1 + 2 \geq x_2 + 2 \Rightarrow x_1 \geq x_2$ Άτοπον.

**iv.** Α(–2, 0) , Β(0, 1)

**v.** Βλέπε παρατήρηση 12 σελ. 42. Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} y = x \\ y = x^3 + x - 2 \end{cases}$, βρίσκουμε

$M(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$.

**Θέμα 10ο**

**i.** Βλέπε άσκηση 7(i).

**ii.** $\left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 = f^2(\alpha) \Leftrightarrow z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 2 = f^2(\alpha) \Leftrightarrow f^2(\beta) + 2 = f^2(\alpha)$, άρα $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$.

**iii.** Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στο διάστημα [–1,1] για τη συνάρτηση

$h(x) = x^3 f(\alpha) + f(\beta)$.

**Θέμα 11ο**

**i.** Υψώνουμε τη σχέση $|z + \overline{\omega}| < |\overline{z} - \omega|$ στο τετράγωνο και μετά τις πράξεις προκύπτει

$z\omega + \overline{z\omega} < 0$ άρα $2\mathrm{Re}(z\omega) < 0$. (Ι).

**ii.** Αντικαθιστούμε στην (Ι) τους μιγαδικούς και βρίσκουμε $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση $f$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ κ.λ.π.

**Θέμα 12ο**

Εργαζόμαστε με τρόπο ανάλογο του θέματος 11.

**Θέμα 13ο**

**i.** Από την υπόθεση προκύπτει

$|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}$ και μετά τις πράξεις

$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$ δηλαδή $2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})=0$ . Αν αντικαταστήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς προκύπτει $e^{\alpha}f(\beta)+e^{\beta}f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{\alpha}}{f(a)}+\dfrac{e^{\beta}}{f(\beta)}=0$ (I).

**ii.** Από την (I) προκύπτει $\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}=-\dfrac{e^{\alpha}}{e^{\beta}}<0$ δηλαδή $f(\alpha)f(\beta)<0$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση f στο διάστημα [α, β] κ.λ.π.

**Θέμα 14ο**

**α.** Αφού $\operatorname{Im}(z_x)=1$ είναι $z_x=x+i$

**i.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|z_x|-\text{συν}x}{[\operatorname{Re}(z_x)]^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\text{συν}x}{x^2}$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση και προκύπτει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{\text{ημ}^2x}{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+\text{συν}x}=1$.

**ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|z_x|-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση και προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=...=0$.

**β.** Η σχέση $|z_x-1|=1$ μετά την αντικατάσταση και τις πράξεις μας δίνει

$f^2(x)=x(2-x)$. (I)

**i.** Η εξίσωση λόγω της (I) είναι ισοδύναμη με την $x(2-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$.

**ii.** Αφού είναι $f(x)>0$ προκύπτει από την (I) $f(x)=\sqrt{x(2-x)}$ , $x\in[0,\ 2]$.

**Θέμα 15ο**

**i.** Έστω $x_1, x_2 \in [0, 1]$ με $x_1<x_2$ τότε αφού η συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα θα ισχύει

$\dfrac{1}{f(x_1)}<\dfrac{1}{f(x_2)}$ και $-\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2}$. Προσθέτουμε κατά μέλη και προκύπτει

$g(x_1)<g(x_2)$ δηλαδή η συνάρτηση g είναι γν. αύξουσα.

**ii.** Το σύνολο τιμών της g είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to 1^-}g(x)\right)=\left(-\infty,2\right)$.

(Να μην ξεχνάμε ότι η συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα άρα $f(0)>f(1)=1$).

**iii.** Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $g(x)=0$. κ.λ.π.

**Θέμα 16ο**

(Βλέπε και Θέμα 3ο )

**i.** $f(x)=\begin{cases} x-3\dfrac{\eta\mu x}{x} & , x\neq 0 \\ -3 & , x=0 \end{cases}$

**iii.** Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση

$h(x)=f(x)-e^{-x}$ στο διάστημα $[0, M]$, όπου M ένας πολύ μεγάλος θετικός αριθμός.

**Θέμα 17ο**

**Β. β. i.** Η συνάρτηση φ είναι γν. αύξουσα ως άθροισμα γν. αυξουσών συναρτήσεων .

**ii.** Ισχύει $f(0)=1$.

$f(x)<e^{1-f(x)} \Leftrightarrow \ln(f(x))<1-f(x) \Leftrightarrow f(x)+\ln(f(x))<1 \Leftrightarrow$

$f(x)+\ln(f(x))+1<2 \Leftrightarrow \varphi(x)<\varphi(1) \Leftrightarrow x<1$

**Θέμα 18ο**

**i.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)=0$. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)=0$

Άρα $\alpha=-1$.

**ii.** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

**ii.** Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ , η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(-\infty,+\infty)$. Άρα και η συνάρτηση $h(x)=\left(f(x)\right)^{2005}-\kappa$, έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(-\infty,+\infty)$. Επομένως υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_o$ τέτοιος ώστε

$h(x_o)=0$.

**Θέμα 19ο**

Βλέπε Θέμα 5ο . Βρίσκουμε $f(4)=7$ κ.λ.π.

**iv.** Εργαζόμαστε με το θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής. κ.λ.π.

**Θέμα 20ο**

**Α.** $(\alpha=4 , \beta=1)$ ή $(\alpha=-3 , \beta=8)$

**Β.** Επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ , είναι $\alpha = -3$ , $\beta = 8$.

**i.** $h(x)=-3x+8+\ln(x-1),\ \ x>1$.

**ii.** Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση h στο διάστημα $[2, e+1]$ ή σε οποιοδήποτε άλλο διάστημα επιλέξουμε ,υπό την προυπόθεση ότι ισχύει το θεώρημα.

**iii.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=\left(f(x)\right)^{2005}-\kappa$ . Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[\mu , M]$, όπου μ ένας πολύ μικρός αρνητικός αριθμός και Μ ένας πολύ μεγάλος θετικός αριθμός. ( Μπορούμε να εργαστούμε και όπως στο θέμα 18(iii) ).

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## *ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΤΑΞΕΩΝ*

### Α. Ταυτότητες

**i.** $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

**ii.** $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

**iii.** $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

**iv.** $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

**v.** $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

**vi.** $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

**vii.** $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

**viii.** $\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 + \ldots\alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$ $(\nu\in N^*)$

### Β. Ιδιότητες απόλυτης τιμής

$\alpha^2 = |\alpha^2|$, $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$, $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ $\beta \neq 0$

$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ (το ίσον ισχύει αν $\alpha\cdot\beta \geq 0$

$|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$, όπου $\theta > 0$

$|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta$ ή $x \geq \theta$, όπου $\theta > 0$

### Γ. Πρόσημο τριωνύμου

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$

**1.** Αν $\Delta > 0$ τότε μεταξύ των ριζών είναι ετερόσημο του α, εκτός των ριζών είναι ομόσημο του α.

**2.** Αν $\Delta \leq 0$ το τριώνυμο είναι πάντα ομόσημο του α.

### Δ. Βασικοί τύποι τριγωνομετρίας

$$\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$$

$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$ $\quad$ $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$

$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$ $\quad$ $\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}, \quad \varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$$

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha}, \quad \sigma\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$$

$$\eta\mu2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha, \quad \sigma\upsilon\nu2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$$

$$\varepsilon\varphi2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}, \quad \sigma\varphi2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}$$

**Νόμος συνημιτόνων: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:** $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

**Τύπος εμβαδού τριγώνου ΑΒΓ:** $\mathbf{E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A}$

## $\boxed{\text{Ε}}$. Αριθμητική - Γεωμετρική πρόοδος

**Αριθμητική πρόοδος** $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \qquad \Sigma_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$

**Γεωμετρική πρόοδος** $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \qquad \Sigma_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1},\ \lambda \neq 1$

## $\boxed{\text{ΣΤ}}$. Εκθετική συνάρτηση

**$f(x) = \alpha^x,\ \alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$**

- **Αν $\alpha > 1$ για την f αποδεικνύεται ότι:**

**1) έχει πεδίο ορισμού το R**
**2) έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$**
**3) είναι γνησίως αύξουσα στο R**
**4) Η $C_f$ έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x.**

- **Αν $0 < \alpha < 1$ για την f αποδεικνύεται ότι:**

**1) έχει πεδίο ορισμού το R**
**2) έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$**
**3) είναι γνησίως φθίνουσα στο R**
**4) Η $C_f$ έχει ασύμπτωτο το θετικό ημιάξονα των x.**

## $\boxed{\text{Ζ}}$. Ιδιότητες λογαρίθμων

**Αν $\alpha > 0$, με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0$ τοτε:**

1. $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$
2. $\log_\alpha \alpha^x = x$
3. $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$
4. $\log_\alpha 1 = 0$
5. $\log_\alpha \alpha = 1$
6. $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$
7. $\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$
8. $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa\log_\alpha\theta,\ \kappa \in R$
9. $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$, αφού $\alpha = e^{\ln\alpha}$.

**Τύπος αλλαγής βάσης:**

10. **αν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha, \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει:** $\log_\beta\theta = \frac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\beta}$

**Λογαριθμική συνάρτηση:**

***( στην ύλη είναι μόνο η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10 ή το e , δηλαδή οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$, $f(x) = \ln x$, $x > 0$ )**

1. έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
2. έχουν σύνολο τιμών το R
3. είναι γνησίως αύξουσες στο διάστημα $(0, +\infty)$
4. οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy΄

## ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

### *Θέμα 3ο (ΘΕΤΙΚΗ 2000)*

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα [0,1]. Αν f(0) = 2 και f(1) = 4, να δείξετε ότι:

**α.** Η ευθεία y = 3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_o \in (0, 1)$.

**β.** υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε: $f\left(x_1\right) = \dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

### *Θέμα 3ο (ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ 2000)*

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^2-8x+16 & ,0<x<5 \\ \left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot\ln\left(x-5+e\right)+2(\alpha+1)e^{5-x} & ,x\geq 5 \end{cases}$$

**Α.** Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$.

**Β.** Να βρεθούν τα α, β ∈R, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_o= 5$.

**Γ.** Για τις τιμές των α,β του ερωτήματος Β να βρείτε το

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.2

### *Θέμα 3ο (ΕΣΠΕΡΙΝΑ 2000)*

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-x^2}{x-1} & ,x<1 \\ \alpha x-2\alpha+3 & ,x\geq 1 \end{cases}$

**α.** Να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_o =1$.

**β.** Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

### *Θέμα 3ο (ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000)*

Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=5$

**α.** Να βρείτε το f(0).

### Θέμα 3ο (2003)

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

**α.** Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

**β.** Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

### Θέμα 2ο (Επαν.2002)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad x \in R$.

**α.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$.

**β.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

### Θέμα 3ο (Επαν.2004)

Δίνεται μια συνάρτηση f: [α, β] → IR συνεχής στο διάστημα [α, β] με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $Re(z) \neq 0$, $Im(z) \neq 0$ και $|R(z)| > |Im(z)|$.

Αν $z + \dfrac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

**α.** $|z| = 1$ **β.** $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$

**γ.** η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

### Θέμα 2ο (2006)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

**α.** Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

**β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ της f και να βρείτε τον τύπο της.

**γ.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και $f^{-1}$ με την ευθεία $y = x$.