Γ. ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης

- **ΑΝΑΛΥΣΗ Κεφ.3ο**

  ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

- **ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

Δημήτρης Αργυράκης **Γεράσιμος Θ. Κουτσανδρέας**

Κεφάλαιο 3ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. Η συνάρτηση $F(x) = x\ln x - x$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \ln x$. **Σ Λ**

2. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, έχει μόνο μια παράγουσα στο Δ. **Σ Λ**

3. Αν F_1, F_2 είναι δυο παράγουσες μιας συνάρτησης f, τότε αυτές διαφέρουν κατά μια σταθερά c. **Σ Λ**

4. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x^2 + 1}$ **δεν** έχει παράγουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. **Σ Λ**

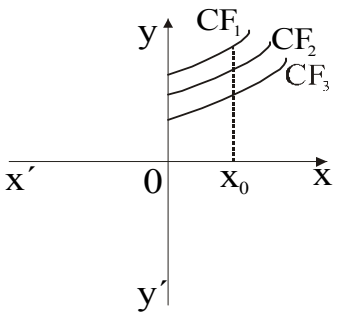
5. Αν f, g δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα ισχύει: $\int f'(x)\, g'(x)\, dx = f'(x)\, g(x) - \int f''(x)\, g(x)\, dx$. **Σ Λ**

6. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα ισχύει $\int (f(x)\, g(x))'\, dx = f(x)\, g(x) + c$. **Σ Λ**

7. Ισχύει: $\int f'(x)\, dx = f(x) + c$. **Σ Λ**

8. Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή την f'', τότε θα ισχύει: $\int f''(x)\, dx = f'(x) + c$. **Σ Λ**

9. Οι γραφικές παραστάσεις των παραγουσών F_1, F_2, F_3 μιας συνάρτησης f, που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, έχουν παράλληλες εφαπτόμενες σε κάθε σημείο τους με τετμημένη x_0.



Σ Λ

10. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $F(x) = e^x + c$, έχουν εφαπτόμενες παράλληλες σε κάθε σημείο τους με τετμημένη x_0. **Σ Λ**

11. Ισχύει: $\int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx = \int (f(x)\, g(x))\, dx$. **Σ Λ**

12. Για $x < 1$ το $\int \dfrac{dx}{x-1}$ είναι ίσο με $\ln(1-x) + c$. **Σ Λ**

13. Αν $f(t) = \int_\alpha^t x\sqrt{x^2 - 2x}\, dx$, τότε $\int_\alpha^t x^2 \sqrt{x^2 - 2x}\, dx = x \cdot f(t)$. **Σ Λ**

14. Ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta \dfrac{x^2 - 4x}{x^3 + 1}\, dx = \dfrac{\int_\alpha^\beta (x^2 - 4x)\, dx}{\int_\alpha^\beta (x^3 + 1)\, dx}$. **Σ Λ**

15. Αν $f'(x) = \dfrac{1}{g'(x)}$, τότε $\int f'(x) \cdot g'(x)\, dx = x + c$. **Σ Λ**

16. Ισχύει: $\int_0^{\alpha} x\, f'(x)\, dx = \alpha\, f(\alpha) - \int_0^{\alpha} f(x)\, dx$. **Σ Λ**

17. Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x)\, dx = 0$. **Σ Λ**

18. Ισχύει: $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int_{\beta}^{\alpha} f'(x)\, g(x)\, dx$. **Σ Λ**

19. Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = 0$. **Σ Λ**

20. Ισχύει: $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt\right)' = f(x)$. **Σ Λ**

21. Ισχύει: $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\, dt\right)' = f(g(x))\, g'(x)$. **Σ Λ**

22. Ισχύει: $\left(\int_{x}^{\alpha} f(t)\, dt\right)' = -f(x)$. **Σ Λ**

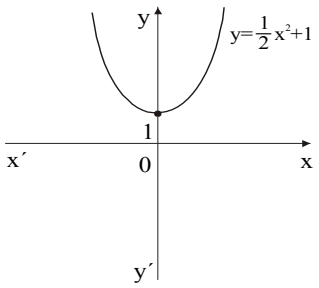
23. Ισχύει: $\left(\int_{g(x}^{h(x)} f(t)\, dt\right)' = f(h(x))\, h'(x) + f(g(x))\, g'(x)$. **Σ Λ**

(Οι ερωτήσεις 24, 25, 26, 27, είναι εκτός ύλης)

24. * Η διαφορική εξίσωση $y' = \kappa y$ ($\kappa \in R$) έχει μερική λύση την $y = e^{\kappa x}$. **Σ Λ**

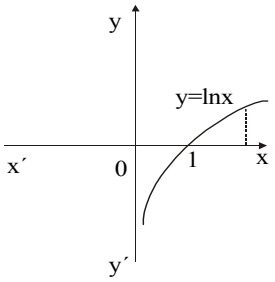
25. * Μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = y$ είναι η συνάρτηση $y = \frac{1}{2} e^{x}$. **Σ Λ**

26. *Η γραφική παράσταση του σχήματος είναι μια μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = x$. **Σ Λ**



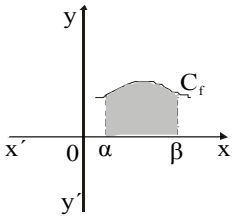
27. * Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $\frac{dy}{dx} = 3$ είναι όλες οι ευθείες με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$. **Σ Λ**

28. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που παριστάνει το $\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$. **Σ Λ**



29. Ισχύει $\int_2^4 c\, dx = \int_6^8 c\, dx$, c σταθερά. **Σ Λ**

30. Το εμβαδόν του σκιασμένου τμήματος είναι ίσο με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + c,\ c \neq 0.$



Σ Λ

31. Αν f συνεχής στο R και f (10) = 100, τότε ισχύει:

$100 = f(0) + \int_{0}^{10} f'(x)\,dx.$ **Σ Λ**

32. Ισχύει: $\int_{0}^{1} \eta\mu x\,dx = 1 - \sigma\upsilon\nu 1.$ **Σ Λ**

33. Αν θεωρήσουμε ότι $e \approx 2{,}7$, τότε ισχύει $\int_{0}^{1} e^{x}dx = 1{,}7.$ **Σ Λ**

34. Αν $A = \int_{0}^{2} f(x)\,dx$, τότε:

α. $\int_{0}^{2} f(\omega)\,d\omega = A$ **Σ Λ**

β. $\int_{2}^{0} f(t)\,dt = -A$ **Σ Λ**

γ. $\int_{0}^{2} (3f(z) - 4)\,dz = 3A - 8$ **Σ Λ**

35. Αν η f είναι περιοδική συνάρτηση στο R με περίοδο T, τότε θα ισχύει: $\int_{0}^{T} f(t)\,dt = \int_{T}^{2T} f(t)\,dt.$ **Σ Λ**

36. Αν $\alpha \geq \beta$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} (e^{x} + 1)\,dx \geq 0.$ **Σ Λ**

37. Αν $f(x) > 0$, τότε ισχύει $\int_{1}^{\ln 2} f(x)\,dx > 0.$ **Σ Λ**

38. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$ τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. **Σ Λ**

39. Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε θα ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx.$ **Σ Λ**

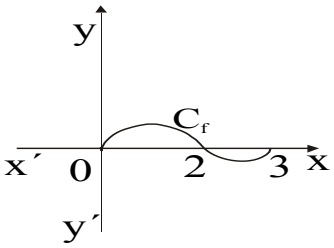
40. Αν $\alpha < \beta$, τότε ισχύει ότι $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx.$ **Σ Λ**

41. Αν η f είναι συνεχής στο [1, 3], τότε ισχύει ότι :

$\int_{1}^{3} f(x)\,dx < \int_{1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx.$ **Σ Λ**

42. Για τη συνάρτηση του διπλανού σχήματος ισχύει ότι:

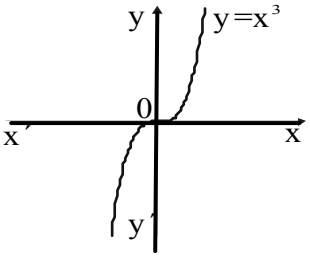
$\int_{0}^{2} f(x)\,dx < \int_{0}^{3} f(x)\,dx.$



Σ Λ

43. Ισχύει: $\int_0^{2\pi} \eta\mu x dx = 0$. **Σ Λ**

44. Για τη συνάρτηση του σχήματος, ισχύει ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$, για κάθε $\alpha > 0$. **Σ Λ**



45. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], τότε το $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα x΄x και των ευθειών $x = \alpha$, $x = \beta$. **Σ Λ**

46. Ισχύει: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - 4\sigma\upsilon\nu^3 x)\,dx > 0$. **Σ Λ**

47. Ισχύει: $\int_1^{x^2} \frac{1}{t}\,dt = 2\ln x$, $x > 0$. **Σ Λ**

48. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. **Σ Λ**

49. Η ιδιότητα του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$, ισχύει μόνο εφόσον $\alpha < \gamma < \beta$. **Σ Λ**

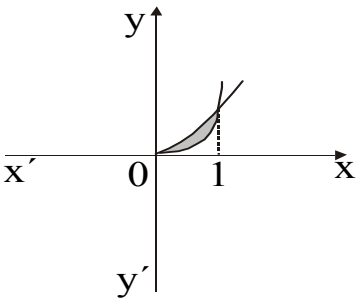
50. Ισχύει ο τύπος $\left(\int_x^{\alpha} f(t)\,dt\right)' = -\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)'$. **Σ Λ**

51. Ισχύει: $\int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} e^x dx = \beta - \alpha$, $\alpha, \beta > 0$. **Σ Λ**

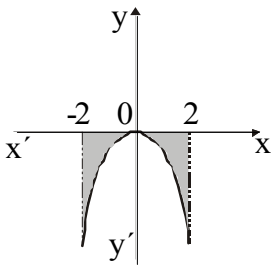
52. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του σχήματος δίνεται από τη σχέση:

$E = \int_0^1 (x^3 - x^2)\,dx$.

(Οι γραφικές παραστάσεις στο σχήμα είναι των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$). **Σ Λ**



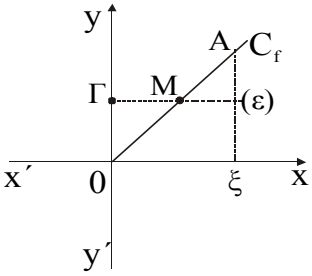
53. Για το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο σχήμα, ισχύει: $E = -\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$. **Σ Λ**



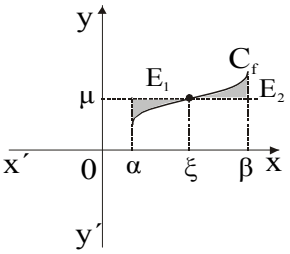
54. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 1] και f (0) = f (1), τότε $\int_0^1 f'(x)\,dx = 0$. **Σ Λ**

55. Αν $\int_0^5 f(x)\,dx = 10$, το ελάχιστο της f στο διάστημα [0, 5] δεν μπορεί να είναι 3. **Σ Λ**

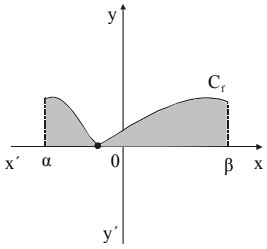
56. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Αν M μέσον του ΟΑ και (ε) // x΄x, τότε θα ισχύει: $\int_0^{\xi} f(x)\,dx = (O\Gamma)\,\xi$. **Σ Λ**



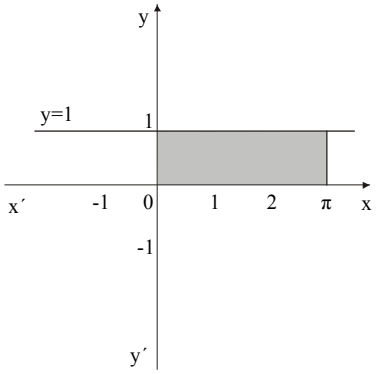
57. Αν ξ ∈ (α, β) και f (ξ) = μ, όπου μ η μέση τιμή της συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β], τότε $E_1 = E_2$. **Σ Λ**



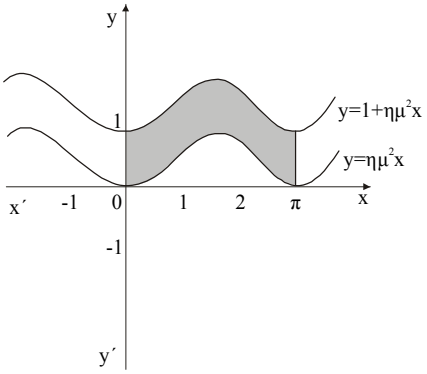
58. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με $E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$. **Σ Λ**



59. Το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος 1 είναι μεγαλύτερο από το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος 2. **Σ Λ**



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Αρχική συνάρτηση

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε:

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$.

Απόδειξη

- Για κάθε $x \in \Delta$ είναι: $G'(x) = \left(F(x) + c\right)' = F'(x) + 0 = f(x)$.

  Άρα κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in R$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ .
- Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ είναι:

  $\begin{cases} G'(x) = f(x) \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$, οπότε $G'(x) = F'(x)$.

  Άρα θα υπάρχει σταθερά $c \in R$ τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Παρατηρήσεις

1. Η έννοια της αρχικής συνάρτησης (παράγουσας) έχει νόημα **μόνο σε διάστημα** και όχι σε ένωση διαστημάτων.
2. **Δεν έχουν νόημα εκφράσεις, όπως:**
   - ***« η F είναι μια παράγουσα της f »,*** γιατί δεν αναφέρεται το διάστημα.
   - ***« η F είναι μια παράγουσα της f στο Α »,*** όταν το Α δεν είναι διάστημα αλλά ένωση διαστημάτων.

   Για παράδειγμα:

   - Αν $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$, τότε κάθε συνάρτηση της μορφής

$F(x) = \ln|x| + c = \ln(-x) + c$, $c \in R$ είναι παράγουσα της f στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

- Αν $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, τότε κάθε συνάρτηση της μορφής $F(x) = \ln|x| + c = \ln x + c$, $c \in R$ είναι παράγουσα της f στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- Αν $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, τότε κάθε συνάρτηση της μορφής $F(x) = \ln|x| + c$, $c \in R$ είναι παράγουσα της f **σε καθένα από τα διαστήματα** $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, όπου η σταθερά c **δεν είναι υποχρεωτικά η ίδια σε κάθε διάστημα**, δηλαδή

$$F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + c_1, & x < 0 \\ \ln x + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

Προσοχή είναι **λάθος** να ισχυριστούμε ότι « η F είναι παράγουσα της f στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$».

3. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν παράγουσες σε ένα διάστημα Δ.
Για παράδειγμα:

Αν $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x \le 0 \\ -1, & 0 < x < 1 \end{cases}$, τότε δεν υπάρχει συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta = (-1, 1)$ τέτοια, ώστε $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

4. Υπάρχουν συναρτήσεις που ενώ δεν είναι συνεχείς έχουν παράγουσες σε ένα διάστημα Δ.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x\,\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x \ne 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$,

ενώ δεν είναι συνεχής (παρουσιάζει ασυνέχεια στο $x_o = 0$), εν τούτοις έχει παράγουσα στο R κάθε συνάρτηση της μορφής $F(x) + c$, όπου

$$F(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & \alpha\nu\ x \ne 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$$

5. Αν F_1, F_2 είναι δυο παράγουσες μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ, τότε:

- Έχουν την ίδια κλίση σε κάθε $x_o \in \Delta$.
- Διαφέρουν κατά μια σταθερά c, δηλαδή $F_1(x) = F_2(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Αόριστο ολοκλήρωμα

Ορισμός

Το σύνολο των παραγουσών συναρτήσεων της f σε ένα διάστημα Δ, ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ** και συμβολίζεται $\int f(x)dx$, δηλαδή

$$\int f(x)dx = F(x) + c,\ c \in R,$$

όπου F μια παράγουσα της f στο Δ .

Πρόταση

Για κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c,\ c \in R$$

Παρατηρήσεις

1.
- Το σύμβολο $\int f(x)dx$ έχει νόημα, όταν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- Δεν είναι αναγκαίο η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο διάστημα Δ.

2. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:
- $\int f(x)dx = \{F(x) + c \ / \ c \in R \text{ και } x \in \Delta\}$
- $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + c\right)' = F'(x) + 0 = f(x)$

3. Η διαδικασία εύρεσης του αορίστου ολοκληρώματος είναι η αντίστροφη πορεία της παραγώγισης και λέγεται **ολοκλήρωση**. Η σταθερά c λέγεται σταθερά ολοκλήρωσης.

Ιδιότητες

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε:

- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, αν $\lambda \in R^*$ και $\int \lambda f(x)dx = c$, αν $\lambda = 0$
- $\int f(x)dx - \int f(x)dx = c$ **(προσοχή δεν απλοποιούμε αόριστα ολοκληρώματα)**

Ο παρακάτω πίνακας αορίστων ολοκληρωμάτων προκύπτει άμεσα από τον πίνακα των παραγώγων βασικών συναρτήσεων και την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1.	$\int 0\,dx = c$	
2.	$\int 1\,dx = x + c$	
3.	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c^*$	$\int \frac{1}{f(x)} f'(x)dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c^*$
4.	$\int x^{\kappa}dx = \frac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1} + c,\ \kappa \neq -1$	$\int f^{\kappa}(x)f'(x)dx = \frac{f^{\kappa+1}(x)}{\kappa+1} + c$
5.	$\int \sigma\upsilon\nu x\,dx = \eta\mu x + c$	$\int \sigma\upsilon\nu f(x)f'(x)dx = \eta\mu f(x) + c$
6.	$\int \eta\mu x\,dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$	$\int \eta\mu f(x)f'(x)dx = -\sigma\upsilon\nu f(x) + c$
7.	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi x + c^*$	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} f'(x)\,dx = \varepsilon\varphi f(x) + c^*$
8.	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\varphi x + c^*$	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} f'(x)\,dx = -\sigma\varphi f(x) + c^*$
9.	$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + c$
10.	$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c,$ $0 < \alpha \neq -1$	$\int \alpha^{f(x)}f'(x)dx = \frac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha} + c,\ 0 < \alpha \neq -1$
11.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} f'(x)dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

12.
$$\int \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right]dx = f(x)g(x) + c$$

13.
$$\int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx = \frac{f(x)}{g(x)} + c$$

∗ Σε κάθε διάστημα δεν έχουμε υποχρεωτικά την ίδια σταθερά c.

ΣΧΟΛΙΟ: Για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε τις παρακάτω μεθόδους:

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Η μέθοδος αυτή εκφράζεται με τον τύπο:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

όπου f , g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ.

Μεθοδολογία

Α΄ ΟΜΑΔΑ:

Όταν έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int P(x)e^{\alpha x+\beta}dx \quad \text{ή} \quad \int P(x)\eta\mu(\alpha x+\beta)dx \quad \text{ή} \quad \int P(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)dx,$$

όπου P (x) πολυωνυμική συνάρτηση και $\alpha \neq 0$, τότε εφαρμόζουμε τον κανόνα της παραγοντικής ολοκλήρωσης, τόσες φορές όσο είναι ο βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης, ξεκινώντας κάθε φορά από μια παράγουσα της εκθετικής ή της τριγωνομετρικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\left(x^2+1\right)e^{3x}dx$

Λύση

Έχουμε

$$\int\left(x^2+1\right)e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int\left(x^2+1\right)\left(e^{3x}\right)'dx = \frac{1}{3}\left[\left(x^2+1\right)e^{3x} - \int\left(x^2+1\right)'e^{3x}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)e^{3x} - \frac{2}{9}\int x\left(e^{3x}\right)'dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)e^{3x} - \frac{2}{9}\left[xe^{3x} - \int x'e^{3x}dx\right] = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}\int e^{3x}(3x)'dx = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c =$$

$$= \frac{1}{27}\left(9x^2+9-6x+2\right)e^{3x} + c = \frac{1}{27}\left(9x^2-6x+11\right)e^{3x} + c$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\left(x^2-3x\right)\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$

Λύση

Έχουμε

$$\int\left(x^2-3x\right)\sigma\upsilon\nu\,2x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2-3x\right)\left(\eta\mu\,2x\right)'dx=$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(x^2-3x\right)\eta\mu\,2x-\int\left(x^2-3x\right)'\eta\mu\,2x\,dx\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left(x^2-3x\right)\eta\mu\,2x-\frac{1}{2}\int(2x-3)\,\eta\mu\,2x\,dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(x^2-3x\right)\eta\mu\,2x+\frac{1}{4}\int(2x-3)\left(\sigma\upsilon\nu 2x\right)'dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(x^2-3x\right)\eta\mu 2x+\frac{1}{4}\left[(2x-3)\sigma\upsilon\nu 2x-\int(2x-3)'\sigma\upsilon\nu 2x\,dx\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left(x^2-3x\right)\eta\mu 2x+\frac{1}{4}(2x-3)\sigma\upsilon\nu 2x-\frac{1}{4}\int 2\sigma\upsilon\nu 2x\,dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(x^2-3x\right)\eta\mu 2x+\frac{1}{4}(2x-3)\sigma\upsilon\nu 2x-\frac{1}{4}\int\sigma\upsilon\nu 2x\,(2x)'dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(x^2-3x\right)\eta\mu 2x+\frac{1}{4}(2x-3)\sigma\upsilon\nu 2x-\frac{1}{4}\eta\mu 2x+c=$$

$$\frac{1}{4}\left(2x^2-6x-1\right)\eta\mu 2x+\frac{1}{4}(2x-3)\sigma\upsilon\nu 2x+c$$

Β΄ ΟΜΑΔΑ:

Όταν έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int P(x)\ln(\alpha x+\beta)dx,$$

όπου $P(x)$ πολυωνυμική συνάρτηση και $\alpha\neq 0$, τότε εφαρμόζουμε τον κανόνα της παραγοντικής ολοκλήρωσης μια φορά ξεκινώντας από μια παράγουσα της πολυωνυμικής συνάρτησης.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\left(3x^2-2x+1\right)\ln x\,dx$

Λύση

Έχουμε

$$\int\left(3x^2-2x+1\right)\ln x\,dx=\int\left(x^3-x^2+x\right)'\ln x\,dx=$$

$$\left(x^3-x^2+x\right)\ln x-\int\left(x^3-x^2+x\right)(\ln x)'dx=$$

$$\left(x^3-x^2+x\right)\ln x-\int\left(x^3-x^2+x\right)\frac{1}{x}dx=$$

$$\left(x^3-x^2+x\right)\ln x-\int\left(x^2-x+1\right)dx=$$

$$\left(x^3-x^2+x\right)\ln x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+c$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \ln x\,dx$

Λύση

Έχουμε

$$\int \ln x\,dx=\int x'\ln x\,dx=x\ln x-\int x\left(\ln x\right)'dx=$$

$$x\ln x-\int x\,\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int 1\,dx=x\ln x-x+c$$

Άρα $\int \ln x\,dx=x\ln x-x+c$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int (2x-1)\ln(x-1)\,dx$

Λύση

Έχουμε

$$\int (2x-1)\ln(x-1)\,dx=\int\left(x^2-x\right)'\ln(x-1)\,dx=$$

$$\left(x^2-x\right)\ln(x-1)-\int\left(x^2-x\right)\left[\ln(x-1)\right]'dx=$$

$$\left(x^2-x\right)\ln(x-1)-\int\frac{x(x-1)}{x-1}dx=$$

$$\left(x^2-x\right)\ln(x-1)-\int x\,dx=\left(x^2-x\right)\ln(x-1)-\frac{x^2}{2}+c$$

Γ΄ ΟΜΑΔΑ:

Όταν έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int e^{\alpha x+\beta}\eta\mu(\kappa x+\lambda)dx \quad \text{ή} \quad \int e^{\alpha x+\beta}\sigma\upsilon\nu(\kappa x+\lambda)dx,$$

με $\alpha\kappa\neq 0$, τότε εφαρμόζουμε τον κανόνα της παραγοντικής ολοκλήρωσης δυο φορές ξεκινώντας και τις δυο φορές από μια παράγουσα της εκθετικής ή και τις δυο φορές από μια παράγουσα της τριγωνομετρικής συνάρτησης.

Παράδειγμα:

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int e^{3x}\eta\mu\,2x\,dx$

Λύση

Έχουμε

$$I=\int e^{3x}\,\eta\mu 2x\,dx=\frac{1}{3}\int\left(e^{3x}\right)'\eta\mu 2x\,dx=\frac{1}{3}\left[e^{3x}\,\eta\mu 2x-\int e^{3x}\left(\eta\mu 2x\right)'dx\right]=$$

$$\frac{1}{3}e^{3x}\,\eta\mu 2x-\frac{2}{3}\int e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x\,dx=\frac{1}{3}e^{3x}\,\eta\mu 2x-\frac{2}{9}\int\left(e^{3x}\right)'\sigma\upsilon\nu 2x\,dx=$$

$$\frac{1}{3}e^{3x}\,\eta\mu 2x-\frac{2}{9}\left[e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x-\int e^{3x}\left(\sigma\upsilon\nu 2x\right)'dx\right]=$$

$$\frac{1}{3}e^{3x}\,\eta\mu 2x-\frac{2}{9}e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x+\frac{2}{9}\int e^{3x}\left(\sigma\upsilon\nu 2x\right)'dx=$$

$$\frac{1}{3}e^{3x}\,\eta\mu 2x-\frac{2}{9}e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x-\frac{4}{9}\int e^{3x}\eta\mu 2x\,dx=$$

$$\frac{1}{3}e^{3x}\,\eta\mu 2x-\frac{2}{9}e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x-\frac{4}{9}I=\frac{1}{9}\left(3\eta\mu 2x-2\sigma\upsilon\nu 2x\right)e^{3x}-\frac{4}{9}I$$

Άρα

$$I+\frac{4}{9}I=\frac{1}{9}\left(3\eta\mu 2x-2\sigma\upsilon\nu 2x\right)e^{3x}+c_1\Leftrightarrow\frac{13}{9}I=\frac{1}{9}\left(3\eta\mu 2x-2\sigma\upsilon\nu 2x\right)e^{3x}+c_1\Leftrightarrow$$

$$I=\frac{1}{13}\left(3\eta\mu 2x-2\sigma\upsilon\nu 2x\right)e^{3x}+c,\ \text{όπου}\ c=\frac{9c_1}{13}.$$

Δ΄ ΟΜΑΔΑ:

Όταν έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int\frac{P(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(\alpha x+\beta)}dx\quad\text{ή}\quad\int\frac{P(x)}{\eta\mu^2(\alpha x+\beta)}dx,$$

όπου P (x) πολυωνυμική συνάρτηση 1ου βαθμού και $\alpha\neq 0$, τότε εφαρμόζουμε τον κανόνα της παραγοντικής ολοκλήρωσης μια φορά ξεκινώντας κάθε φορά από μια παράγουσα της συνάρτησης $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\alpha x+\beta)}$ ή $\frac{1}{\eta\mu^2(\alpha x+\beta)}$.

Παράδειγμα:

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\frac{2x+3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

Λύση

Έχουμε

$$\int\frac{2x+3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\int(2x+3)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\int(2x+3)(\varepsilon\varphi x)'dx=$$

$$(2x+3)\varepsilon\varphi x-\int(2x+3)'\varepsilon\varphi x\,dx=(2x+3)\varepsilon\varphi x-2\int\varepsilon\varphi x\,dx=$$

$$(2x+3)\varepsilon\varphi x-2\int\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx=(2x+3)\varepsilon\varphi x+2\int\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}(\sigma\upsilon\nu x)'dx=$$

$(2x+3)\varepsilon\varphi x+2\ln|\sigma\upsilon\nu x|+c$, όπου η σταθερά c δεν είναι υποχρεωτικά η ίδια σε κάθε διάστημα.

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Η μέθοδος αυτή εκφράζεται με τον τύπο:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du\,, \quad \text{όπου } u = g(x) \text{ και } du = g'(x)dx$$

Παρατηρήσεις

1. Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζονται ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\int f(g(x))g'(x)dx$.

2. Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα $\int f(u)du$ του 2ου μέλους υπολογίζεται ευκολότερα.

3. Η παρουσία της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ και του παράγοντα $g'(x)dx$ στο ολοκλήρωμα του 1ου μέλους αποτελούν σοβαρές ενδείξεις για εφαρμογή της μεθόδου αυτής.

4. Αν η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα Δ, η f είναι συνεχής στο $g(\Delta)$, και F είναι μια αρχική της f στο $g(\Delta)$, τότε μια αρχική της $f(g(x))g'(x)$ στο Δ είναι η $F(g(x))$, δηλαδή

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c\,, \quad c \in R \text{ και } x \in \Delta.$$

Μεθοδολογία

Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα με τη μέθοδο της αντικατάστασης κάνουμε τα εξής:

α. Εντοπίζουμε τη σύνθετη συνάρτηση $f(g(x))$.

β. Θέτουμε $u = g(x)$ και υπολογίζουμε το διαφορικό $du = g'(x)dx$.

γ. Δημιουργούμε στο ολοκλήρωμα τον παράγοντα $g'(x)dx$ και στη συνέχεια αντικαθιστούμε όλους τους όρους του ολοκληρώματος συναρτήσει της μεταβλητής u, οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα $\int f(u)du$.

δ. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int f(u)du$.

ε. Επαναφέρουμε την αρχική μεταβλητή x αντικαθιστώντας, όπου u το g(x).

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^4}dx$.

Λύση

Θέτουμε $u = x^2 - 2x + 2$, οπότε $du = (x^2 - 2x + 2)'dx \Leftrightarrow du = (2x-2)dx$

Είναι

$$\int \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2-2x+2)^4}(2x-2)dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^4}du = \frac{1}{2}\int u^{-4}du =$$

$$\frac{1}{2}\frac{u^{-4+1}}{-4+1}+c=-\frac{1}{6}u^{-3}+c=-\frac{1}{6}\left(x^2-2x+2\right)^{-3}+c$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int(3x-2)(x+1)^7\,dx$.

Λύση

Θέτουμε $u=x+1\Leftrightarrow x=u-1$, οπότε $du=(x+1)'dx\Leftrightarrow du=dx$

Είναι

$$\int(3x-2)(x+1)^7\,dx=\int\left[3(u-1)-2\right]u^7du=\int(3u-5)u^7du=\int\left(3u^8-5u^7\right)du=$$

$$3\frac{u^{8+1}}{8+1}-5\frac{u^{7+1}}{7+1}+c=\frac{3}{9}u^9-\frac{5}{8}u^8+c=\frac{1}{3}(x+1)^9-\frac{5}{8}(x+1)^8+c$$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων:

1. *Ο αριθμητής έχει βαθμό μικρότερο από τον παρονομαστή.*

Θεωρούμε το κλάσμα $\frac{P(x)}{G(x)}$. Αν το πολυώνυμο $G(x)$ έχει απλές πραγματικές ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu$ και γράφεται $G(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\nu)$, τότε υπάρχουν σταθεροί πραγματικοί αριθμοί $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ τέτοιοι ώστε να είναι

$$\frac{P(x)}{G(x)}=\frac{A_1}{(x-\rho_1)}+\frac{A_2}{(x-\rho_2)}+\dots+\frac{A_\nu}{(x-\rho_\nu)}$$

Παράδειγμα

Το κλάσμα $\frac{3x-2}{x^3+x^2-4x-4}$ γράφεται σαν άθροισμα των κλασμάτων

$$\frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta}{x+2}+\frac{\gamma}{(x+1)}\quad \text{κ.λ.π.}$$

Ιδιαιτέρως πρέπει να προσέχουμε όταν ο παρονομαστής έχει ρίζα πολλαπλότητας μεγαλύτερης ή ίσης του 2.

Παράδειγμα

Το κλάσμα $\frac{2x+3}{x(x-1)^2}$ γράφεται σαν άθροισμα των κλασμάτων $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x-1}+\frac{\gamma}{(x-1)^2}$ κ.λ.π.

2. *Ο αριθμητής έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από τον παρονομαστή.*

Στην περίπτωση αυτή κάνουμε τη διαίρεση των πολυωνύμων

Παράδειγμα

$$\frac{2x^2-3x+5}{x-1}=2x-1+\frac{4}{x-1}$$

Χρήσιμοι τύποι: $\eta\mu^2x=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$, $\sigma\upsilon\nu^2x=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$

Ασκήσεις για λύση

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(Στον παρακάτω πίνακα στη πρώτη στήλη είναι το ολοκλήρωμα και στη δεύτερη είναι η απάντηση)

Στήλη Α	*Στήλη Β*
1. $\int (x^3+x)dx$	$\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c$
2. $\int \frac{2x^3-5x+7}{x}dx$	$\frac{2x^3}{3}-5x+7\ln\lvert x\rvert+c$
3. $\int (\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$	$\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+2\sqrt{x}+c$
4. $\int \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}}dx$	$\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}-x+\frac{2}{3}\sqrt{x}+c$
5. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}dx$	$\frac{\sqrt{2x^2+3}}{2}+c$
6. $\int \frac{8x+3}{\sqrt{4x^2+3x+5}}dx$	$2\sqrt{4x^2+3x+5}+c$
7. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$	$2\sqrt{\ln x}+c$
8. $\int \frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}dx$	$-2\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}+c$
9. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$	$\ln(x^2+x+1)+c$
10. $\int \frac{1+e^x}{x+e^x}dx$	$\ln\lvert x+e^x\rvert+c$
11. $\int \frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu^2 x}dx$	$\ln(1+\eta\mu^2 x)+c$
12. $\int 2xe^{x^2+3}dx$	$e^{x^2+3}+c$
13. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$	$\ln\lvert\ln x\rvert+c$

14. $\int x\,2^{x^2+1}dx$	$\frac{2^{x^2+1}}{2\ln 2}+c$
15. $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$	$\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}+c$
16. $\int (x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)dx$	$x\eta\mu x + c$
17. $\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx$	$\frac{e^x}{x}+c$
18. $\int \left(\frac{1}{x}+\ln x\right)e^x dx$	$e^x \ln\lvert x\rvert + c$
19. $\int \frac{x}{e^{x^2}}dx$	$-\frac{1}{2e^{x^2}}+c$
20. $\int \frac{x+2}{x+3}\,dx$	$x-\ln\lvert x+3\rvert + c$
21. $\int \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\,dx$	$x-\ln\lvert x+1\rvert + c$
22. $\int \sqrt{3x+2}dx$	$\frac{2}{9}(\sqrt{3x+2})^3+c$
23. $\int xe^{x+1}dx$	$xe^{x+1}-e^{x+1}+c$
24. $\int e^x \sigma\upsilon\nu x dx$	$\frac{1}{2}e^x(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)+c$
25. $\int x\cdot 3^x dx$	$\frac{1}{\ln 3}x\cdot 3^x-\frac{1}{\ln^2 3}3^x+c$
26. $\int x\eta\mu x dx$	$\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c$
27. $\int \frac{x^2-2}{(x^3-6x+1)^2}dx$	$-\frac{1}{3(x^3-6x+1)}+c$
28. $\int \frac{x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}\,dx$	$\frac{1}{2}\ln(\ln(1+x^2))+c$
29. $\int e^x \sigma\upsilon\nu e^x dx$	$\eta\mu e^x + c$
30. $\int \frac{\varepsilon\varphi x}{\ln\sigma\upsilon\nu x}dx$	$-\ln\lvert\ln\sigma\upsilon\nu x\rvert + c$

31. $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$	$3\ln\lvert x-2\rvert - 2\ln\lvert x-1\rvert + c$
32. $\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx$	$\ln\lvert x-2\rvert - \ln\lvert x-1\rvert + c$
33. $\int \frac{x^2-2x+2}{x^2-3x+2}dx$	$x - \ln\lvert x-1\rvert + 2\ln\lvert x-2\rvert + c$
34. $\int \frac{5x^2+3x+1}{x-1}dx$	$\frac{5}{2}x^2 + 8x + 9\ln\lvert x-1\rvert + c$
35. $\int \frac{x^4}{\sqrt{1+x^5}}dx$	$\frac{2}{5}\sqrt{1+x^5} + c$
36. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ **i.** Αν $I_\nu = \int \ln^\nu x\, dx,\ \nu \in N^*$, αποδείξτε ότι $I_\nu = x\ln^\nu x - \nu I_{\nu-1},\quad \nu \geq 2$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \ln^3 x\, dx$. **ii.** Αν $I_\nu = \int x^\nu e^x dx,\ \nu \in N^*$, αποδείξτε ότι $I_\nu = x^\nu e^x - \nu I_{\nu-1},\quad \nu \geq 2$ **iii.** Αν $I_\nu = \int \eta\mu^\nu x dx,\ \nu \in N^*$, αποδείξτε ότι $I_\nu = -\frac{1}{\nu}\sigma\upsilon\nu x\, \eta\mu^{\nu-1}x + \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2},\ \nu \geq 2$ **iv.** Αν $I_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^\nu x\, dx,\ \nu \in N^*$, αποδείξτε ότι $I_\nu = \frac{1}{\nu}\eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x + \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2},\ \nu \geq 2$ **v.** Αν $I_\nu = \int \varepsilon\varphi^\nu x\, dx,\ \nu \in N^*$ αποδείξτε ότι $I_\nu = \frac{1}{\nu-1}\varepsilon\varphi^{\nu-1}x - I_{\nu-2},\ \nu \geq 3$	$x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + c$ **Υπόδειξη:** το $\eta\mu^\nu x$ το γράφουμε $\eta\mu^{\nu-1}x\, \eta\mu x$ και κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. **Υπόδειξη:** το $\sigma\upsilon\nu^\nu x$ το γράφουμε $\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\, \sigma\upsilon\nu x$ και κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. **Υπόδειξη:** την $\varepsilon\varphi^\nu x$ τη γράφουμε $\varepsilon\varphi^{\nu-2}x\varepsilon\varphi^2 x =$ $\varepsilon\varphi^{\nu-2}x\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi^{\nu-2}x\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ και κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΣΧΟΛΙΟ: Για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε τις παρακάτω μεθόδους:

- **Ολοκλήρωση κατά παράγουσες** (Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int_\alpha^\beta f'(x)dx = \left[f(x)\right]_\alpha^\beta = f(\beta)f(\alpha)$.,
- **Ολοκλήρωση κατά παράγοντες** (Η μέθοδος αυτή εκφράζεται από τον τύπο: $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f ΄, g΄ συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα [α, β].
- **Ολοκλήρωση με αντικατάσταση** (Η μέθοδος αυτή εκφράζεται από τον τύπο: $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$, $u_1 = g(\alpha)$ και $u_2 = g(\beta)$.

Ιδιότητες

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] τότε :

- $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$
- $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$
- $\int_\alpha^\beta c\,dx = c(\beta - \alpha)$, για κάθε $c \in R$
- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$, για κάθε $\lambda \in R$
- $\int_\alpha^\beta [f(x) + g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$, για κάθε $\lambda, \mu \in R$
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α, β, γ ∈ R, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

Ασκήσεις για λύση

- **Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:**

(Στον παρακάτω πίνακα στη πρώτη στήλη είναι το ολοκλήρωμα και στη δεύτερη είναι η απάντηση)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $\int_0^{\pi}(\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x)dx$	$-\pi$
2. $\int_0^1 2xe^{x^2+1}dx$	$e^2 - e$
3. $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$	$2\sqrt{2} - 2$
4. $\int_0^1 (x^2-1)e^{2x}dx$	$\frac{1-e^2}{4}$
5. $\int_0^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu x\, dx$	$-\frac{e^{\pi}+1}{2}$
6. $\int_0^1 \ln(1+x)dx$	$\ln 4 - 1$
7. $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$	$2 - \frac{5}{e}$
8. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$	$1 - \frac{2}{e}$
9. $\int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu 2x\, dx$	0
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x\, dx$	(υπόδειξη. $\eta\mu^3 x = \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu x$, κ.τ.λ) $\frac{2}{3}$
11. $\int_1^e \ln^2 x\, dx$	$e - 2$
12. $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx$	$\frac{26}{3}$
13. $\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$	$\frac{e-1}{3}$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu 3x)\cdot 2^{\sigma\upsilon\nu 3x}dx$	$\frac{1}{3\ln 2}$
15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x\sqrt{\eta\mu x}\ dx$	$\frac{2}{3}$
16. $\int_e^{e^3} \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}\ dx$	$\frac{\ln^2 3}{2}$
17. $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)\cdot e^{x^2-x}dx$	$\frac{1}{\sqrt[4]{e}}-1$
18. $\int_0^1 \frac{e^{3x}+e^{2x}}{e^x+2}\ dx$	$\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}+2\ln\frac{e+2}{3}$
19. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\ dx$	$\frac{1}{3}$
20. $\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}\ dx$	$\frac{7}{2}+\ln 2$
21. $\int_0^{\pi} e^{-x}\eta\mu x\ dx$	$\frac{1}{2}\left(1+e^{-\pi}\right)$
22. $\int_1^e \left(\frac{1}{x}+\ln x\right)\cdot e^x dx$	e^e
23. $\int_0^1 x^3 e^{x^2}dx$	$\frac{1}{2}$
24. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx$	$2\left(2-\sqrt{e}\right)$
25. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$	$\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$
26. $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\ dx$	$\frac{1}{2}\ \ln\frac{3}{2}$
27. $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2-3x+2}\ dx$	5ln2-3ln3
28. $\int_0^1 \frac{x^3+x-2}{x^2+2x+1}\ dx$	$4\ln 2-\frac{7}{2}$

29. $\int_0^{1/2} \frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}\,dx$	$5+\ln 3$
30. $\int_1^2 \frac{x-1}{2x^3+x^2}\,dx$	$-\frac{1}{2}+3(\ln 6/5)$
31. $\int_0^2 \lvert x^2-1\rvert\,dx$	2
32. $\int_{-1}^1 \lvert x\rvert\cdot e^x dx$	$2-\frac{2}{e}$
33. $I_\nu=\int_0^2 x^\nu e^x dx\ ,\ \nu\in N^*$	$I_\nu=2^\nu e^2-\nu I_{\nu-1},\ \nu\geq 2$
34. $\int_1^{e^2} \lvert\ln x-1\rvert\,dx$	$2e-2$
35. $\int_0^2 (\lvert x-1\rvert+x+1)\,dx$	5
36. $\int_{-1}^1 f(x)dx$, αν είναι $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ,\ x\geq 0\\ x^2 & ,\ x<0\end{cases}$	1 ***Παρατήρηση***: Σε συναρτήσεις που έχουν πολλαπλό τύπο πρέπει να μελετάμε πρώτα τη συνέχεια στο σημείο αλλαγής τύπου αν για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος απαιτούνται και οι δύο κλάδοι της συνάρτησης.
37. $\int_{-2}^1 f(x)dx$, αν είναι $f(x)=\begin{cases}3x^2 & ,\ x\leq 0\\ e^{-x}-1 & ,\ x>0\end{cases}$	$8-\frac{1}{e}$

38. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x}\ln(1+e^x)dx$

(απ. $-\frac{\ln(1+e)}{e}+\ln 4+1-\ln(1+e)$)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έχει αποδειχθεί ότι υπάρχουν ολοκληρώματα τα οποία δεν υπολογίζονται. Δηλαδή δεν μπορούν να εκφρασθούν συναρτήσει των γνωστών στοιχειωδών συναρτήσεων.

π.χ. $\int \frac{1}{\ln x}\,dx$, $\int e^x \ln x\,dx$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (σελ. 334)

Αν f είναι μία συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x \in \Delta$, είναι μία παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει $\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτουν (ως συμπληρώσεις) τα παρακάτω:

i. $\left(\int_{a}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$

ii. $\left(\int_{x}^{\alpha} f(t)dt\right)' = \left(-\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = -f(x)$

iii. $\left(\int_{x}^{x^2} f(t)dt\right) = \left(\int_{x}^{\alpha} f(t)dt + \int_{\alpha}^{x^2} f(t)dt +\right)' = -f(x) + f(x^2)\cdot 2x$

iv. $\left(\int_{a}^{x} x.f(t)dt\right)' = \left(x.\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = \int_{a}^{x} f(t)dt + x.f(x)$

v. $\left(\int_{0}^{1} f(x-t)dt\right)'$ θέτουμε $x-t=u$ κ.λ.π.

vi. $\left(\int_{1}^{2} f(x\cdot t)dt\right)'$ θέτουμε $x\cdot t=u$ κ.λ.π.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης :

$$F(x)=\int_{0}^{x} \frac{t}{t^2-1}\,dt$$

Λύση

Η συνάρτηση $f(t)=\dfrac{t}{t^2-1}$ είναι συνεχής στο σύνολο

$A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Για να ορίζεται η F πρέπει και αρκεί τα άκρα ολοκλήρωσης 0 , x να ανήκουν στο **ίδιο διάστημα** του πεδίου ορισμού της f. Επειδή το $0 \in (-1, 1)$ πρέπει το $x \in (-1, 1)$.

Άρα $A_F = (-1, 1)$.

Για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε $F'(x) = \int_0^x \frac{t}{t^2-1}\,dt = \frac{x}{x^2-1}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

- Το πεδίο ορισμού της $F(x) = \int_{-2}^x \frac{t}{t^2-1}\,dt$ είναι $A_F = (-\infty, -1)$ και το

$$F'(x) = \left(\int_{-2}^x \frac{t}{t^2-1}\,dt\right)' = \frac{x}{x^2-1},\ x \in (-\infty, -1)$$

- Το πεδίο ορισμού της $F(x) = \int_2^x \frac{t}{t^2-1}\,dt$ είναι το $A_F = (1, +\infty)$ και

$$F'(x) = \left(\int_2^x \frac{t}{t^2-1}\,dt\right)' = \frac{x}{x^2-1},\ x \in (1, +\infty)$$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης $F(x) = \int_2^{x^2-1} \sqrt{t}\,dt$

Λύση

(Για τον υπολογισμό του A_F)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι συνεχής στο $A_F = (0, +\infty)$.

Για να ορίζεται η F πρέπει και αρκεί τα άκρα ολοκλήρωσης $2,\ x^2-1$ να ανήκουν **στο ίδιο διάστημα** του πεδίου ορισμού A_f της συνάρτησης f. Επειδή το $2 \in [0, +\infty)$ πρέπει και το $(x^2-1) \in [0, +\infty)$ δηλαδή $x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq -1$

Άρα $A_F = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x-2}}^{x^2-x} \frac{e^t}{t}\,dt$$

Λύση

Η συνάρτηση $f(t) = \frac{e^t}{t}$ είναι συνεχής στο σύνολο $A_F = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Η συνάρτηση $g(x) = x^2 - x$ είναι ορισμένη στο $A_g = R$ και $h(x) = \frac{1}{x-2}$ είναι ορισμένη στο. $A_h = (-\infty,\ 2] \cup [2, +\infty)$

Είναι $A_g \cap A_h = (-\infty,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$

Ένας αριθμός $x \in R$ ανήκει στο πεδίο ορισμού A_F της συνάρτησης F ,

αν και μόνο αν

i. $x \in A_g \cap A_h \Leftrightarrow x \in (-\infty,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$ και

ii. οι $g(x) = x^2 - x,\ h(x) = \frac{1}{x-2}$ ανήκουν στο **ίδιο διάστημα** του πεδίου ορισμού A_f της συνάρτησης f.

Πρέπει λοιπόν και αρκεί

$$\left(\begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 - x < 0 \\ \frac{1}{x-2} < 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 - x > 0 \\ \frac{1}{x-2} > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \neq 2 \\ 0 < x < 1 \\ x < 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x \neq 2 \\ x < 0 \text{ ή } x > 1 \\ x > 2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(0 < x < 1 \text{ ή } x > 2 \right)$$

Άρα $A_F = (0,\ 1) \cup (2,\ +\infty)$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΗΣ F

- Παράγωγος της F στο $I_1 = (0,\ 1)$

Οι συναρτήσεις $g(x) = x^2 - x$ και $h(x) = \frac{1}{x-2}$ είναι παραγωγίσιμες στο I_1 και οι τιμές τους ανήκουν στο $(-\infty, 0)$ για κάθε $x \in I_1$, οπότε και η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο I_1.

Θεωρούμε έναν αριθμό $\xi \in (-\infty, 0)$, οπότε για κάθε $x \in I_1$ έχουμε

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x-2}}^{x^2-x} \frac{e^t}{t}\,dt = \int_{\frac{1}{x-2}}^{\xi} \frac{e^t}{t}\,dt + \int_{\xi}^{x^2-x} \frac{e^t}{t}\,dt = \int_{\xi}^{x^2-x} \frac{e^t}{t}\,dt - \int_{\xi}^{\frac{1}{x-2}} \frac{e^t}{t}\,dt$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \int_{\xi}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$, $x \in (-\infty, 0)$ οπότε

$$\varphi'(x) = \frac{e^x}{x} \quad x \notin (-\infty, 0).$$

Για κάθε $x \in I_1$, έχουμε $F(x) = \varphi\left(x^2 - x\right) - \varphi\left(\frac{1}{x-2}\right)$, οπότε

$$F'(x) = \varphi'\left(x^2 - x\right)\cdot\left(x^2 - x\right)' - \varphi'\left(\frac{1}{x-2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right)' \Leftrightarrow$$

$$F'(x) = \frac{e^{x^2-x}}{x^2-x}(2x-1) - \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{\frac{1}{x-2}}\cdot\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) \Leftrightarrow F'(x) = \frac{(2x-1)e^{x^2-x}}{x^2-x} + \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x-2}$$

$x \in (0,\ 1)$.

- Παράγωγος της F στο $I_2 = (2, +\infty)$

Εργαζόμαστε ομοίως και βρίσκουμε $F'(x) = \frac{(2x-1)e^{x^2-x}}{x^2-x} + \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x-2}$, $x \in (2, +\infty)$

Άρα $F'(x) = \frac{(2x-1)e^{x^2-x}}{x^2-x} + \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x-2}$, $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$.

1. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων :

(Στον παρακάτω πίνακα στη πρώτη στήλη είναι η συνάρτηση και στη δεύτερη είναι η απάντηση)

Στήλη Α	***Στήλη Β***
1. $g(x) = \int_1^x (t^2+1)dt$	$g'(x) = x^2+1$
2. $g(x) = \int_x^1 (t^2+1)dt$	$g'(x) = -(x^2+1)$
3. $g(x) = \int_1^{x^2} (t^2+1)dt$	$g'(x) = (x^4+1)\cdot 2x$
4. $g(x) = \int_{x^2}^1 (t^2+1)dt$	$g'(x) = -(x^4+1)\cdot 2x$
5. $g(x) = \int_x^{x^2} (t^2+1)dt$	$g'(x) = -(x^2+1) + (x^4+1)\cdot 2x$
6. $g(x) = \int_1^{x^2+1} \sqrt{t^2+1}\ dt$	$g'(x) = 2x\sqrt{(x^2+1)^2+1}$
7. $g(x) = \int_{x+1}^x (e^t+1)dt$	$g'(x) = e^x - e^{x+1}$
8. $g(x) = \int_1^x \eta\mu(x-t)dt$	$g'(x) = \eta\mu(x-1)$

9. $g(x)=\int_0^1 x\cdot ημ(xt)\,dt$	$g'(x)=ημx$
10. $g(x)=\int_0^1 tf(tx)dt$	$g'(x)=-\frac{2}{x^3}\int_0^x uf(u)du+\frac{1}{x}f(x)$
11. $g(x)=e^x+x\cdot\int_0^1 f(xt)\,dt,\quad x\geq 0.$	$g'(x)=e^x+f(x)$
12. $g(x)=1+\frac{1}{x}\cdot\int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)dt,\ x>0$	$g'(x)=\frac{1}{x^2}f(x)$
13. $g(x)=\int_0^x e^t f(x-t)\,dt$	$g'(x)=f(x)+e^x\int_0^x \frac{f(u)}{e^u}\,du$ **Παρατήρηση** Κάνουμε τις αντικαταστάσεις **α.** $x-t=u$ **β.** $xt=u$ **γ.** $\frac{x}{t}=u$ κ.λ.π.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_{\pi/6}^{2x}\frac{ημt}{t}\,dt$, με $x>0$.

α. Να βρείτε την $f'(x)$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_1^{2x} e^{t-x}\ln t\,dt$. Αποδείξτε ότι:

α. $f(x)+f'(x)=2e^x\ln(2x)$ **β.** $f''(x)=f(x)+2\frac{e^x}{x}$

* **γ.** Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{1}{2}$ (κριτήριο $2^{ης}$ παραγώγου)

4. α. Αποδείξτε ότι $e^x\geq x+1$, για κάθε $x\in R$.

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x (e^{συνt}-συνt-1)\,dt$ αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

5. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$ αποδείξτε ότι γνησίως φθίνουσα είναι και η συνάρτηση $g(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x (e^{2(x-t)}-e^{x-t})\,dt$. Αποδείξτε ότι $F'(0)=0$.

7. Αποδείξτε ότι **α.** $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x συνt^2dt=1$. **Β.** $\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{e^t-1}{x}\,dt=0$

γ. $\lim\limits_{x\to 2^+}\int_2^x \frac{\ln(t-1)}{(x-2)^3}\,dt = +\infty$ **δ.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\int_0^{\frac{1}{x}} xe^{t^2}\,dt = 1$ **ε.** $\lim\limits_{x\to 1}\int_1^x \frac{\ln t}{x-1}\,dt = 0$

8. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

α. $F(x) = \int_2^{x-1}\sqrt{t^2-1}\,dt$ **β.** $G(x) = \int_e^{x^2-3}\frac{t}{\ln t}\,dt$

απ. ($D_F = [2, +\to\infty)$, $D_G = (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$)

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \int_{-1}^{t-1}\sqrt{x^2-5x+6}\,dx$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο πεδίο ορισμού της.

γ. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(t) = 0$ έχει μοναδική λύση.

δ. Να βρείτε το πρόσημο της f. απ. ($D_f = (-\infty,3]$)

10. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις.

α. $f(x) = \int_0^x e^{t-f(t)}\,dt$, $x\in R$. απ. ($f(x) = x$)

β. $\int_0^x x\cdot f(t)\,dt = x^2+1$, $x>0$. απ. ($f(x) = 1-\frac{1}{x^2}$)

γ. $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = e^x-1$, $x\in R$. απ. ($f(x) = e^x$)

δ. $\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt = x^2e^x - f(x)$, $x\in R$. απ. ($f(x) = 2e^x(x-1)+2$)

ε. $f(x) = 1+2\int_0^x \frac{f(x-t)}{e^t}\,dt$, $x\in R$. απ. ($f(x) = 2e^x-1$)

στ. $\int_0^x e^t f(x-t)\,dt = \eta\mu x$, $x\in R$ απ. ($f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$)

ζ. $x+\int_0^x f(t)\,dt = (x+2)f(x)$, $x\ge 0$ απ. ($f(x) = \ln(x+2)-\ln 2$)

η. $\int_a^x e^{-t}f(t)\,dt = e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x)$, $x,\alpha\in R$ απ. ($f(x) = \alpha - x$)

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_e^x \frac{t}{\ln t}\,dt$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να εξεταστεί η f ως προς την μονοτονία.

γ. Αποδείξτε ότι $\int_e^5 f(t)\,dt \ge 0$.

δ. Αποδείξτε ότι η C_f έχει σημείο καμπής το σημείο $M(e, 0)$.

απ. ($D_f = (1,+\infty)$, γν. αύξουσα)

12. α . Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,+\infty)$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt > 0$, για κάθε $x > 0$.

β. Να αποδείξετε την ανισότητα $\int_0^x e^{t^2}dt \le xe^{x^2}$, για κάθε $x \ge 0$.

13. α. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και ισχύει $f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1, 2]$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\int_1^x f(t)dt = x^2 - 3$ έχει μοναδική λύση στο (1, 2)

β. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και ισχύει $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $e^{\xi} + \int_0^{\xi} f(x)dx = 2$.

γ. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και $\int_0^1 f(x)dx = e$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = e^{\xi} + 2\xi$.

δ. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f(x) < 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $2\xi - 1 = \int_0^{\xi} f(t)dt$.

ε. Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $\int_0^x f(t)dt + e^x \le 1 - xf(x)$. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0, -\frac{1}{2})$.

α. β. Εργαζόμαστε με Θ.Bolzano

γ. εργαζόμαστε με θ.Rolle)

ε. εργαζόμαστε με θ.Fermat)

14. Η συνάρτηση $f : R \to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι :

α. Η συνάρτηση $G(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x-t)\,dt$, $x \in R$ είναι παραγωγίσιμη.

β. Αν υπάρχει $x_0 \in R$ ώστε $G'(x_0) = 0$, τότε είναι $G(x) = 0$ για κάθε $x \in R$.

(ΘΕΜΑ 1995)

ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες που δίνονται σε κάθε περίπτωση.

1. $f(x) = x^2 - x - 2$ και τον άξονα x΄x απ. (27/6 τ.μ.)

2. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ απ. (1 τ.μ.)

3. $f(x) = \frac{1}{2} - \eta\mu x$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ απ. ($\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$ τ.μ.)

4. $f(x) = x^2 e^x$, $x = -2$, $x = 0$

απ. ($2 - 10e^{-2}$ τ.μ.)

5. $f(x) = \left|\frac{\ln x}{x}\right|$, $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ απ. (1 τ.μ.)

6. $f(x) = -x^2 + 2x$, $x = -2$, $x = 2$

απ. (8 τ.μ.)

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $x = 0$, $x = 2$ απ. (1/2 τ.μ.)

8. $f(x) = \frac{x+2}{2x+3}$, $x = -1$, $x = 0$

απ. ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 3$ τ.μ.)

9. $f(x) = x\eta\mu x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ απ. (1 τ.μ.)

10. $f(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$, $x = -1$, $x = 1$

απ. ($2 - \frac{2}{\sqrt{e}}$ τ.μ.)

11. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x \le 0 \\ e^{-x} - 1 & , x > 0 \end{cases}$, $x = -2$, $x = 1$

απ. ($8 + \frac{1}{e}$ τ.μ.)

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + 4)e^{-x}$, $x \in R$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x, y) με $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le f(x)$.

απ. ($4e - 6e^{-1}$ τ.μ.)

(ΘΕΜΑ 1992)

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - e & , \ x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x} & , \ x \ge 1 \end{cases}$ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου , το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξίσωση $x = 0$ και $x = e$

απ. ($\frac{5}{3}$ τ.μ.)

(ΘΕΜΑ 1991)

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x, την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την ευθεία $x = -1$

απ.($\frac{e}{2} - \frac{1}{e}$ τ.μ.)

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$. Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 0$ $x = e$.

απ. (3/2 τ.μ.)

16) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες που δίνονται σε κάθε περίπτωση.

α. $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x = 0$, $x = \pi$

απ. ($2\sqrt{2}$ τ.μ.)

β. $f(x) = -x^2 + 5x - 4$, $g(x) = -2x + 6$, $x = 0$, $x = 6$

απ. (17 τ.μ.)

γ. $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $x = -1$, $x = 1$

απ.($\frac{e^2 + 4e - 1}{e}$ τ.μ.)

Κεφ. 3ο Ασκήσεις Επανάληψης ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στις παρακάτω ασκήσεις οι συναρτήσεις που είναι στα ολοκληρώματα θεωρούνται συνεχείς .

1. i. Αν $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx = 5$ και $f(\pi)=2$ δείξτε ότι $f(0)=3$.

ii. Αν $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon\nu x\right)dx = 3$ δείξτε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$

iii. Αν $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx = 2$ και $f'(0)=1$ δείξτε ότι $f'(\pi)=-3$

iv. Έστω συνάρτηση $f:[0,\ 1]\to R$ με $f(0)+f(1)=0$ και συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0 , 1] . Δείξτε ότι $\int_0^1 x(x-1)f''(x)dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$.

2. Έστω η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και αντιστρέφεται σ' αυτό . Αποδείξτε ότι $\int_a^{\beta} f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(\beta)} f^{-1}(y)dy = \beta\, f(\beta) - \alpha\, f(\alpha)$.

(Θεωρούμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα [f(a), f(β)]).

3) Έστω συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,\pi]$ και

$\int_0^{\pi} f''(x)\cdot\eta\mu x\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\cdot\eta\mu x\,dx = 0$, δείξτε ότι $f(\pi)+f(0)=0$.

4. Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,\pi]$ και $f(\pi)=e^{-\pi}$. Αν

$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f'(x)\right)e^{x}dx = 2$, δείξτε ότι $f(0)=-1$.

5. i. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I=\int_a^{e}\left(x^2\ln x - x^2\right)dx$.

ii. Δείξτε ότι $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} I(\alpha) = -\frac{e^3}{9}$ (απ. $I=\frac{\alpha^3}{9}-\frac{e^3}{9}-\frac{\alpha^3}{3}(\ln\alpha-1)$)

6. Αν $f(x)=f(\alpha+\beta-x)$ τότε δείξτε :

$\int_{\alpha}^{\beta} x\cdot f(x)\,dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_a^{\beta} f(x)\,dx$.

7. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [–α , α] αποδείξτε ότι :

i. Αν η f είναι περιττή ισχύει: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$.

ii. Αν η f είναι άρτια ισχύει: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$.

iii. Αν η f είναι άρτια αποδείξτε ότι :

α. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \eta\mu 3x\,dx = 0$

β. $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{1+e^{\kappa x}}\,dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx\,, \quad \alpha > 0$

8. Αν f συνεχής στο $[0\,,\pi]$ αποδείξτε ότι:

i. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)\,dx$

ii. $\int_{0}^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)\,dx$

iii. $\int_{0}^{\pi} x\cdot f(\eta\mu x)\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\int_{0}^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx = \pi\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)\,dx$

iv. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x)\,dx$

v. Εφαρμόζοντας την (iv) να υπολογιστούν τα :

$I_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x\,dx$ και $I_2 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$.

9. Έστω συνάρτηση $f:[-1,\,1]\to R$, συνεχής στο [-1 , 1] και τέτοια ώστε

$f(x)+f(-x)=\pi$, για κάθε $x\in[-1,\,1]$. Δείξτε ότι: $\int_{0}^{\pi} f(\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu x\,dx = \pi$.

10) Έστω f συνεχής στο R, για την οποία ισχύει:

$f(x+y) = f(x) + f(y)\,, \quad x, y\in R$.

Αποδείξτε ότι:

i. Η f είναι περιττή

ii. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)\,dx$

iii. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(\alpha+\beta)\cdot\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$.

11. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x\,, \quad x > 0$. Αποδείξτε ότι:

i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

ii. $e-1 \le \int_1^e f(x)\,dx \le (e-1)(e^2+1)$

iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int e^{f(x)}\,dx$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\cdot \ln\dfrac{1}{|x|}\,, & x\neq 0 \\ 0\,, & x=0 \end{cases}$

i. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

iii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, $\lambda>0$.

iv. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} E(\lambda)$.

13. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Έστω συνάρτηση $g: R\to R$ για την οποία ισχύει: $|g(x)+x-2|\le|f(x)|$.

i. Αποδείξτε ότι η ευθεία $y=-x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f τον άξονα x΄x και την ευθεία x = 1.

iii. Αποδείξτε ότι $\int_0^2 g(x)\,dx \le \ln 5+2$.

14. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$, και η συνεχής συνάρτηση $f: R\to R$ για την οποία ισχύει $f(0)=2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=|z-5i|x^2-2x-\int_x^0 |z+3i|\cdot f(t)\,dt$, για την οποία ισχύει $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in R$.

i. Αποδείξτε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο , κινείται σε κύκλο με κέντρο $K(0,-3)$ και ακτίνα ρ = 1.

ii. Να βρεθεί ο μιγαδικός z με το μεγαλύτερο και το μικρότερο μέτρο.

iii. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z+2|$.

15. Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$, και τη συνεχή συνάρτηση $f : R \to R$ με τύπο $f(x) = \int_1^{x^2+1} |t \cdot z + z| \, dt - 3x + 2$.

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$, αποδείξτε ότι :

i. $|z| = \frac{1}{2}$

ii. Οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού $w = 2z - i$, στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(0, -1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

απ. (iii) $E = \frac{53}{60}$ τ. μ.)

16. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει: $f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x+1} \int_1^x f(t) \, dt$, $x \in (0, +\infty)$.

i. Αποδείξτε ότι $f(1) = 0$

ii. Αποδείξτε ότι $f'(x) = 3x - 1$.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x)$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

απ.(iv. E = 21 τ.μ.)

17. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύουν : $f(1) = 0$ και $x \cdot f'(x) - 2 \cdot f(x) = x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

i. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x f(t) \, dt}{(\ln x)^2}$.

(απ. ii) $f(x) = x^2 - x$, iii) $\frac{1}{2}$)

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

i. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

ii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f όταν το $x \to -\infty$.

iii. Αποδείξτε ότι $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x) = 0$.

iv. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

(ΘΕΜΑ ΙΟΥΛΙΟΣ 2003) (απ. ii) $y = -2x$)

19. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - \ln x + e^x$, $x \cup (1,+\infty)$

i. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

iii. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 2005$, έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1,+\infty)$.

iv. Έστω $\Pi = \int_2^e f(x)\,dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)\,dx$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi - 2\ln 2$.

απ .(ii) $+\infty$ iv) $e^{e+1} - e - e^2 - 4$)

20. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R , για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει f(0) = 0 και η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

i. Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f(x) = x\cdot f'(\xi)$.

iii. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x} + e^x$, $x > 0$ είναι συνάρτηση 1-1 στο διάστημα $(0,+\infty)$.

iii. Αν $h(x) = e^x + x^5 + x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e-1} f(x+1)\,dx$.

(απ. **iii.** $I = \frac{3\cdot e^7 + 7\cdot e^3 - 440}{21}$)

21. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha + e^x, & x \le 0 \\ x\cdot\ln x, & x > 0 \end{cases}$, $\alpha \in R$.

Α. Να υπολογίσετε τον $\alpha \in R$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Β. Αν $\alpha = -1$

i. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$..

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

(απ . **i.** όχι **i.** τ. μεγ. το $f(0)$, τ. ελ. το $f\left(\frac{1}{e}\right)$, συν. τιμών $(-1,+\infty)$.

iii. 0,1. **iv.** $E = \frac{1+e^2}{4}$ τ. μ.)

22. Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

α. $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$

β. $f(x) = 1 - 2 \cdot x^2 \int_0^1 t\, f^2(xt)\, dt$, για κάθε $x \in R$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \qquad x \in R .$$

i. Αποδείξτε ότι ισχύει: $f'(x) = -2 \cdot x \cdot f^2(x)$.

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

iii. Αποδείξτε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to +\infty} \left(x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x\right)$

απ. (**iv.** 0) (ΘΕΜΑ 2001)

23. Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{t\, f(t)}{x^2}\, dt , \quad x > 0.$$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

ii. Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$, $x>0$.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

v. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Απ. **iii.** $(-\infty, 1]$ **iv.** $y = 0$, $x = 0$ **iv.** 3/2 τ.μ. (ΘΕΜΑ ΙΟΥΛΙΟΣ 2001)

24. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R.

Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

i. Αποδείξτε ότι η g είναι 1-1.

i. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

iii. Δίνεται επιπλέον ότι οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο R , με $(f \circ g)(0) = 0$ και

$$\int_0^{g(x)} f(t)\,dt+\int_0^{x}(f\circ g)(t)\,dt = 1\text{, για κάθε } x \in R .$$

Αποδείξτε ότι $\displaystyle\int_0^{g(x)+x} f(t)dt = 1$, για κάθε $x \in R$.

25. A. Έστω δυο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta h(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx .$$

B. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(x)-e^{-f(x)}=x-1,\ \ x\in R$ και $f(0)=0$.

i. Να εκφραστεί η f΄ως συνάρτηση της f.

ii. Αποδείξτε ότι $\dfrac{x}{2}<f(x)<x\cdot f'(x),\ \ x>0$.

iii. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη C_f, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα x΄x , αποδείξτε ότι $\dfrac{1}{4}<E<\dfrac{1}{2}f(1)$.

(ΘΕΜΑ 2002)

26. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ ώστε $f(1) = 1$. Αν για κάθε $x \in R$, ισχύει: $g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t)\, dt - 3 \cdot \left| z + \frac{1}{z} \right| \cdot (x-1) \geq 0$, όπου $z = \alpha + \beta i \in C$ με $\alpha, \beta \in R^*$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε τη g'.

ii. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$

iii. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος (ii) να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$.

iv. Αν επιπλέον $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta$ και $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

(ΘΕΜΑ 2004)

27. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \to R$ ώστε

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\, f(2xt)\, dt .$$

i. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

ii. Αποδείξτε ότι $f(x) = e^x - (x+1)$.

iii. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(ΘΕΜΑ ΙΟΥΛΙΟΣ 2004)

28. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to (0, +\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x \cdot \int_0^1 f(xt)\, dt - x$.

i. Αποδείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη.

ii. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο A (0 , 2) , να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$.

iii. Υποθέτουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=3$ και $x=5$ είναι 2 τ. μ. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (3,5)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$.

29. Έστω $h:[1,+\infty) \to R$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:

$$h(x)=1999(x-1)+\int_1^x \frac{h(t)}{t}\,dt \quad \text{για κάθε } x \geq 1.$$

Να αποδείξετε ότι :

α. $h(x)=1999x \cdot \ln x, \quad x \geq 1.$

β. Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

(1η ΔΕΣΜΗ 1999)

30. Έστω f μία πραγματική συνάρτηση συνεχής στο R τέτοια ώστε $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in R$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_0^{x^2-5x} f(t)dt, \quad x \in R$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-3) \cdot g(0) < 0$

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(-3, 0)$.

(ΘΕΜΑ 1997)

31. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-2)\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt, \; x > 0$.

1. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η f'.

2. Αποδείξτε ότι εφαρμόζετε το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα [1,2].

3. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $(2-\xi)\frac{\ln\xi}{\xi} = \int_1^\xi \frac{\ln t}{t}\,dt$.

4. Έστω $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\int_1^3 h(x)\,dx \leq \frac{2}{e}$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

1. Να γίνει η μελέτη της f και να παρασταθεί γραφικά.

2. Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \le \int_1^2 f(x)dx \le 2$.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 2 και x = 4.

4. Να προσδιορίσετε την κάθετη ευθεία στον άξονα x΄x που χωρίζει το προηγούμενο χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

(απ. 3) $\frac{9}{4}$ τ.μ. 4) πρέπει $\int_2^{\alpha} f(x)dx = \frac{9}{8}$ κ.λ.π.)

33. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : R \to R$ που ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_0^x (1+t^2)f(t)\,dt = x^2 + \int_0^1 6x\,(t^2+t)\,dt, \quad x \in R .$$

α. Αποδείξτε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+1}$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

απ. (β) $y = 2x + 5$) (ΘΕΜΑ 2000)

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4 \quad , \quad x > 0$

α. Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

β. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt = 4$.

(ΘΕΜΑ 1993)

35. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη.

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \ge f(1+x)$, για κάθε $x \in R$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα x΄x και την ευθεία με εξίσωση x = 3.

απ. α) σ.κ. το (0,0)

(ΘΕΜΑ 2003)

δ) Ε= 25/12 τ.μ.)

Κεφάλαιο 3ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου Σωστό-Λάθος

1	Σ		22	Σ		40	Σ
2	Λ		23	Λ		41	Λ
3	Σ		24	Σ		42	Λ
4	Λ		25	Σ		43	Σ
5	Σ		26	Σ		44	Σ
6	Σ		27	Σ		45	Λ
7	Σ		28	Σ		46	Σ
8	Σ		29	Σ		47	Σ
9	Σ		30	Λ		48	Λ
10	Σ		31	Σ		49	Λ
11	Λ		32	Σ		50	Σ
12	Σ		33	Σ		51	Σ
13	Λ		34			52	Λ
14	Λ		α)	Σ		53	Σ
15	Σ		β)	Σ		54	Σ
16	Σ		γ)	Σ		55	Σ
17	Σ		35	Σ		56	Σ
18	Λ		36	Λ		57	Σ
19	Σ		37	Λ		58	Σ
20	Σ		38	Λ		59	Λ
21	Σ		39	Σ			