Γ. ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά θετικής τεχνολογικής κατεύθυνσης

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΦ. 2^{ο}

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Δημήτρης Αργυράκης **Γεράσιμος Θ. Κουτσανδρέας**

• *Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ*

Παράγωγος αριθμός στο $x_0 \in R$

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο Δ και $x_0 \in \Delta$. Για να εξετάσουμε, αν η f παραγωγίζεται ή όχι στο x_0 και στην περίπτωση που παραγωγίζεται να βρούμε την $f'(x_0)$, κάνουμε τα εξής :

A. Αν η f παραγωγίζεται σ' ένα υποσύνολο του Δ που περιέχει το x_0, τότε βρίσκουμε την $f'(x)$ και στη συνέχεια αντικαθιστούμε όπου x το x_0.

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$. Να βρείτε την $f'(\pi)$.

Λύση

Για κάθε $x \in R$ είναι

$$f'(x) = (x\,\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = (x\,\eta\mu x)' + (\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x + x\,\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = x\,\sigma\upsilon\nu x$$

Επομένως $f'(\pi) = \pi \cdot \sigma\upsilon\nu\pi = \pi \cdot (-1) = -\pi$.

B. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις, όπου η παραγωγισιμότητα της f στο x_0 εξετάζεται <u>υποχρεωτικά</u> με τον ορισμό:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{ή} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Αυτές είναι:

1. Αν το x_0 είναι σημείο μηδενισμού απόλυτης τιμής.

Παράδειγμα 1ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x|x|$. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$ και να βρείτε την $f'(0)$.

Λύση

Για $x \neq 0$ έχουμε $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 \in R$.

Άρα η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

Παράδειγμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x|x-1|$. Να εξετάσετε αν η f παραγωγίζεται στο $x_o = 1$

Λύση

Για $x > 1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x|x-1|}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x = 1.$

Για $x < 1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x|x-1|}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{-x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(-x) = -1.$

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, άρα η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται στο $x_o = 1$.

2 Αν το x_o είναι σημείο μηδενισμού υπόριζης ποσότητας.

Παράδειγμα 1ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}\,\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_o = 0$ και να βρείτε την $f'(0)$.

Λύση

Για $x > 0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\,\eta\mu x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\,\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 0\cdot 1 = 0 \in R.$

Άρα η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $x_o = 0$ με $f'(0) = 0$.

Παράδειγμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+3}$. Να εξετάσετε αν η f παραγωγίζεται στο $x_o = -3$

Λύση

Για $x > -3$ έχουμε $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{\sqrt{x+3}}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{\sqrt{x+3}} = +\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{x+3} = 0$ και $\sqrt{x+3} > 0$ για $x \in (-3, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται στο $x_o = -3$.

3. Αν το x_o είναι σημείο αλλαγής του τύπου της συνάρτησης.

Παράδειγμα 1ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3 & , x\ge 1 \\ 3x-2 & , x<1 \end{cases}$**. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο** $x_o=1$ **και να βρείτε την** $f'(1)$**.**

Λύση

Για $x>1$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3.$$

Για $x<1$ έχουμε $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x-2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{x-1}=3.$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=3$, άρα η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $x_o=1$ με $f'(1)=3$.

Παράδειγμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x & , x\ge 0 \\ x^2 & , x<0 \end{cases}$**. Να εξετάσετε αν η f παραγωγίζεται στο** $x_o=0$

Λύση

Για $x>0$ έχουμε $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1.$

Για $x<0$ έχουμε $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0.$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ne\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, άρα η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται στο $x_0=0$.

4. Αν το x_o δίνεται με ειδική τιμή.

Παράδειγμα 1ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \frac{\eta\mu^2 x}{x} & , x\ne 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$**. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο** $x_o=0$ **και να βρείτε την** $f'(0)$**.**

Λύση

Για $x \neq 0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\eta\mu^2 x}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1$

Άρα η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $x_o=0$ με $f'(0)=1$.

Παράδειγμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} & , \ x\neq 0\\ 0 & , \ x=0\end{cases}$. **Να εξετάσετε αν η f παραγωγίζεται στο $x_o=0$**

Λύση

Για $x \neq 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{1}{x^2}\right)=+\infty,$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu x)=1>0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$.

Άρα η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται στο $x_o=0$

Σημείωση :

Ένας 2ος τρόπος για να αποδείξουμε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο $x_o=0$ είναι η ασυνέχεια της f στο $x_o=0$ (**Ο οποίος πρέπει και να προηγείται**).

5. Αν δε γνωρίζω τον τύπο της f, αλλά γνωρίζω ένα όριο μιας παράστασης της f.

Παράδειγμα

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $x_o=2$ με $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x^2+6x}{x-2}=6$.

Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_o=2$ και να βρείτε την $f'(2)$.

Λύση

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-x^2+6x}{x-2}$ κοντά στο $x_o=2$, οπότε

$f(x)=(x-2)g(x)+x^2-6x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=6$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left((x-2)g(x)+x^2-6x\right)=0\cdot 6+4-12=-8$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_o = 2$ είναι $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = -8$

Για x κοντά στο $x_o = 2$ έχουμε

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)g(x)+x^2-6x-(-8)}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)g(x)}{x-2}+\frac{x^2-6x+8}{x-2}\right] = \lim_{x\to 2}\left[g(x)+x-4\right] = 6+2-4 = 4.$$

Άρα η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $x_o = 2$ με $f'(2) = 4$.

6. Αν δε γνωρίζω τον τύπο της f , αλλά γνωρίζω μια ανισότητα για την f.

Παράδειγμα

Έστω συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τη σχέση $2x\,\eta\mu\, x \le xf(x) \le \eta\mu^2 x + x^2$. Αν $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_o = 0$ και να βρείτε την $f'(0)$.

Λύση

Για x κοντά στο 0 είναι $x^2 > 0$, οπότε έχουμε :

$$2x\,\eta\mu\, x \le xf(x) \le \eta\mu^2 x + x^2 \Leftrightarrow \frac{2x\,\eta\mu\, x}{x^2} \le \frac{x f(x)}{x^2} \le \frac{\eta\mu^2 x + x^2}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\eta\mu\, x}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\frac{\eta\mu\, x}{x} \le \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \le \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + 1,\ \text{αφού } f(0) = 0.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\eta\mu\, x}{x}\right) = 2\cdot 1 = 2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + 1\right] = 1^2 + 1 = 2$,

οπότε από κριτήριο παρεμβολής

έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$. Άρα η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $x_o = 2$ με

$f'(0) = 2$.

7. Αν δε γνωρίζω τον τύπο της f , αλλά γνωρίζω μια ισότητα για την f.

Παράδειγμα

Έστω συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + xf^2(x) = x^3 + \eta\mu^3 x$. Αν η f παραγωγίζεται στο $x_o = 0$ να βρείτε την $f'(0)$.

Λύση

Η f παραγωγίζεται στο $x_o = 0$ οπότε $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Για $x=0$ από την αρχική σχέση έχουμε $f^3(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$, άρα

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ (1). Για x κοντά στο 0 είναι $x^3 \neq 0$, οπότε έχουμε :

$$f^3(x)+x\,f^2(x)=x^3+\eta\mu^3 x \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{x^3}+\frac{xf^2(x)}{x^3}=\frac{x^3}{x^3}+\frac{\eta\mu^3 x}{x^3}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2=1+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3.$$ Άρα

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\right]=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3\right]\Leftrightarrow$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right)^3+\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right)^2=1+\left(\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$[f'(0)]^3+[f'(0)]^2-2=0 \Leftrightarrow (f'(0)-1)\left([f'(0)]^2+2f'(0)+2\right)=0 \Leftrightarrow f'(0)=1$$

8. Αν δε γνωρίζω τον τύπο της f , αλλά γνωρίζω μια συναρτησιακή σχέση για την f.

Παράδειγμα

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(0)=1$ και $f(x+y)=\sigma\upsilon\nu x\cdot f(y)+\sigma\upsilon\nu y\cdot f(x)$ για κάθε $x, y\in \mathbf{R}$, να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0=\pi$ και να βρείτε την $f'(\pi)$.

Λύση

Για $x=y=0$ από την αρχική σχέση έχουμε :

$f(0+0)=\sigma\upsilon\nu 0\cdot f(0)+\sigma\upsilon\nu 0\cdot f(0)\Leftrightarrow f(0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0.$

Η f παραγωγίζεται στο 0, οπότε $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=1$.

Για $x\neq\pi$ θα βρούμε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$. Θέτουμε $x=\pi+h$, όταν $x\to\pi$ το $h\to 0$ και έχουμε

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{\pi+h-\pi}=\lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\pi\cdot f(h)+\sigma\upsilon\nu h\cdot f(\pi)-f(\pi)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\sigma\upsilon\nu\pi\cdot\frac{f(h)}{h}+f(\pi)\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right]=(-1)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+f(\pi)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}$$

$$(-1)\cdot 1+f(\pi)\cdot 0=-1$$

Άρα η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $x_o = \pi$ με $f'(\pi) = -1$.

Παρατήρηση: Στο προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να δουλέψουμε κατευθείαν με τον τύπο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} = \ldots$

ΣΧΟΛΙΟ: *Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$, $x > 0$ (εφαρμόζουμε τον τύπο αλλαγής βάσης) , $g(\theta) = \eta\mu\theta$ (και όλες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις) , όταν το θ εκφράζει το μέτρο της γωνίας σε μοίρες.*

Ισχύει:

α. $f'(x) = (\log x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln 10}\right)' = \dfrac{1}{x\ln 10}$

β. Είναι γνωστή η σχέση που συνδέει τα ακτίνια με τις μοίρες.

$\left(\dfrac{x}{\pi} = \dfrac{\theta}{180} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi\theta}{180}\right)$.

Άρα:

$\dfrac{dg}{d\theta} = \dfrac{dg}{dx}\dfrac{dx}{d\theta} = \sigma\upsilon\nu x \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{180}\sigma\upsilon\nu\theta^o$ (επειδή αν θ το μέτρο σε μοίρες και x το μέτρο σε ακτίνια της ίδιας γωνίας ισχύει $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta^o$).

Δηλαδή ισχύει $g'(\theta) = \dfrac{\pi}{180}\sigma\upsilon\nu\theta$

Ασκήσεις για λύση

1. Α. Να βρεθούν τα α , β ∈R ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες στα αντίστοιχα x_o.

i. $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \ x < 2 \\ \alpha x + \beta & , \ x \geq 2 \end{cases}$, $x_o = 2$ (απ. α = 12 , β = –16)

ii. $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta , & x < -1 \\ x^2 - x + 1, & x^3 \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = -1$ (απ. α = – 3 , β = 0)

iii. $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 1 , & x \leq 1 \\ \sqrt{x} + \beta , & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$ (απ. α = 1/4 , β = –7/4)

iv. $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta & , \ x \leq 2 \\ \sqrt{x^2+5} & , \ x > 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$ (απ. α = –10/3 , β =17/3)

Β. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^3+\beta x-5}{x-1}, & x\neq 1\\ 7 \quad , & x=1\end{cases}$$

i. Να βρεθούν οι α , $\beta \in R$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_o = 1$.

ii. Να βρεθεί η $f'(x)$, για κάθε $x \in R$. (απ. $\alpha = 1$, $\beta = 4$).

2. α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 3$ και $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=-5$, αποδείξτε ότι $f'(3)=-5$.

β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 2$ και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=12$, αποδείξτε ότι $f'(2)=12$.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=12$ και $g(x)=(x^4+2x^2+5)f(1)$, αποδείξτε ότι $g'(1)=16$.

3. α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 5$ και $g(x)=\left(x^2-7x+10\right)\cdot f(x)$ δείξτε ότι: $g'(5)=3\cdot f(5)$.

β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 1$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει $g(x) = (x^2 - 3x + 2)f(x)$ αποδείξτε ότι $g'(1) = -f(1)$.

γ. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f(x)=\left(x^3-5x+2\right)g(x)$ για κάθε $x \in R$. Αν $g(0)=2$ και $g'(0)=3$. Δείξτε ότι $f'(0)=-4$.

4. α. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $3x-x^2\le f(x)\le 2x+xe^x$ για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε ότι $f'(0)=3$.

β. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $|f(x)-\eta\mu x|\le x^2$ για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

γ. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε για κάθε $x \in R$, να ισχύει:

$g(x)\le f(x)\le g(x)+(x-2)^2$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 2$ με

$g'(2) = 7$ δείξτε ότι $f'(2)=7$.

5. α. Έστω η συνάρτηση $f:R \to R$ με: $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, για κάθε $x, y \in R$, με $f(0) \neq 0$. Δείξτε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_o \in R$ και ισχύει $f'(x_0) = f(x_0)\cdot f'(0)$

β. Έστω η συνάρτηση $f:R \to R$ με: $f(x+y) = f(x)\cdot \text{συν}y + f(y)\cdot \text{συν}x$, για κάθε $x, y \in R$. Δείξτε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = f'(0)\cdot \text{συν}x$.

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση f. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = |x - x_o| f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o αν και μόνο αν $f(x_o) = 0$.

7. Έστω συνάρτηση $f:R \to R$ παραγωγίσιμη στο R με: $f(\alpha+\beta) \leq f(\alpha)\cdot f(\beta)$ για κάθε α, β∈ R. Αν $f'(0) = 1$ και $f(0)=1$, δείξτε ότι: $f'(x) = f(x)$, για κάθε x∈ R.

8. Έστω συνάρτηση $f:R \to R$ τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in R$. Έστω επίσης συνάρτηση $g:R \to R$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ και $f(x) = 1 + x\cdot g(x)$ για κάθε x∈ R. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = f(x)$, για κάθε x∈ R.

9. Να αποδείξετε τις παρακάτω αντιστοιχίσεις:

Στήλη Α (συνάρτηση)	**Στήλη Β (πρώτη παράγωγος)**
i. $f_1(x) = \ln x\,\text{συν}x$	$f_1'(x) = \frac{1}{x}\text{συν}x - \ln x\,\text{ημ}x$
$f_2(x) = (x^3 - x)\text{ημ}x$	$f_2'(x) = (3x^2 - 1)\text{ημ}x + (x^3 - x)\text{συν}x$
$f(x) = \text{συν}^3 x$	$f'(x) = 3\text{ημ}^3 x - 3\text{ημ}x$
$g(x) = \text{ημ}(x^3 - 1)$	$g'(x) = 3x^2\text{συν}(x^3 - 1)$
$h(x) = e^{\text{ημ}3x}$	$h'(x) = 3e^{\text{ημ}3x}\text{συν}3x$
$\varphi(x) = e^{1+x^2}\text{ημ}x$	$\varphi'(x) = e^{1+x^2}(2x\text{ημ}x + \text{συν}x)$

ii. $f(x) = \ln^3 x \ , \ x > 0$ $h(x) = \dfrac{x^2}{\ln x} \ , \ x > 0 \ , x \neq 1$ $g(x) = \ln(\ln x) \ , \ x > 1$ $\varphi(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{x^2+1} \ , \ x > 0$	$f'(x) = \dfrac{3\ln^2 x}{x} \ , \ x > 0$ $h'(x) = \dfrac{2x\ln x - x}{(\ln x)^2} \ , \ x > 0 \ , x \neq 1$ $g'(x) = \dfrac{1}{x\ln x} \ , \ x > 1$ $\varphi(x) = \dfrac{2x\ln x + x^3 + x}{(x^2+1)^2} \ , \ x > 0$
iii. $f(x) = \ln x^3 \ , \ x > 0$ $g(x) = \ln(e^{2x}+3)$ $h(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$	$f'(x) = \dfrac{3}{x} \ , \ x > 0$ $g'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+3}$ $h'(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
iv. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \ , \ x \geq 0$ $g(x) = e^x \sqrt{x^2+1}$	$f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right) - x}{2\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \ , \ x \geq 0$ $g'(x) = g(x) + \dfrac{e^x x}{\sqrt{x^2+1}}$
v. $f(x) = \left(\ln x\right)^{\ln x} \ , \ x > 1$ $g(x) = x^{\eta\mu x} \ , \ x > 0$ **Σημειώνουμε ότι:** $\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))} \ , f(x) > 0$	$f'(x) = \left(\ln x\right)^{\ln x} \dfrac{1+\ln(\ln x)}{x}, \ x > 1$ $g'(x) = x^{\eta\mu x}\left(\sigma\upsilon\nu x \ln x + \dfrac{1}{x}\eta\mu x\right), \ x > 0$
vi. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$	$f'(x) = \begin{cases} 2x\sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi}{x} + \pi\eta\mu \dfrac{\pi}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$ $g'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu \dfrac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \dfrac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

vii. $g(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & , \ 0\le x<1\\ \dfrac{x^2+5}{6} & , \ x\ge 1\end{cases}$	$g'(x)=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$ $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & , \ 0<x<1\\ \dfrac{x}{3} & , \ x\ge 1\end{cases}$
viii. $f(x)=x-\lvert x^2-2x\rvert$ $g(x)=\lvert x^2-4\rvert \ , \ x\ne\pm 2$ $h(x)=\lvert \eta\mu x\rvert \ , x\ne \kappa\pi, \quad \kappa\in Z$ **Σημειώνουμε ότι:** **1.** Πρέπει πρώτα να βγάλουμε το απόλυτο. **2.** Μπορούμε να δουλέψουμε χρησιμοποιώντας και την ισότητα $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$.	$f'(x)=\begin{cases}-2x+3 & , \ x<0 \ , \ x>2\\ 2x-1 & , \ 0<x<2\end{cases}$ $g'(x)=\dfrac{2x(x^2-4)}{\lvert x^2-4\rvert} \ , \ x\ne\pm 2$ $h'(x)=\dfrac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\lvert \eta\mu x\rvert} \ , x\ne \kappa\pi$
ix. $f(x)=1+(1+x)^{\frac{4}{5}} \ , \ x\ge -1$ $g(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ $h(x)=\sqrt[3]{(x-1)^4}$	$f'(x)=\dfrac{4}{5\sqrt[5]{1+x}} \ , \ x>-1$ $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} & , \ x>1\\ \dfrac{2}{-3\sqrt[3]{1-x}} & , x<1\end{cases}$ $h'(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x-1} & , \ x\ge 1\\ -\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{1-x} & , \ x<1\end{cases}$ **Παρατήρηση:** Αποδεικνύουμε με τον ορισμό ότι οι συναρτήσεις f και g **δεν** είναι παραγωγίσιμες στο –1 και 1 αντιστοίχως.
x. $g(x)=f(\eta\mu x)$ $h(x)=\eta\mu\left(f(x)\right)^2$ $\varphi(x)=\left(f(\sigma\upsilon\nu x)\right)^2$ **Παρατήρηση:** Θεωρούμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R.	$g'(x)=f'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x$ $h'(x)=2f(x)f'(x)\sigma\upsilon\nu\left(f(x)\right)^2$ $\varphi'(\chi)=-2f(\sigma\upsilon\nu x)f'(\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x$

10. i. Αν $f(x) = -x + 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x$, αποδείξτε ότι $f''(x) + f(x) + x = 0$.

ii. Αν $f(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + 1$, $x > 0$, αποδείξτε ότι $xf'(x) + x^2 f''(x) = 1$.

iii. Αν $f(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x$, αποδείξτε ότι $\left(\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{f(x)}$.

iv. Αν $f(x) = \eta\mu(\ln x)$, $x > 0$, αποδείξτε ότι $x^2 f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$.

v. Αν $f(x) = \frac{x}{2}\left(\eta\mu(\ln x) - \sigma\upsilon\nu(\ln x)\right)$, $x > 0$, αποδείξτε ότι $|f'(x)| \le 1$.

vi. Αν $f(x) = \ln\frac{2}{(x+2)}$, $x > -2$, αποδείξτε ότι $xf'(x) - e^{f(x)} + 1 = 0$.

vii. Αν $f(x) = \eta\mu^2(\alpha x)$, $x \in R$, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε να ισχύει $f''(x) + 4\alpha^2 f(x) = 2$ για κάθε $x \in R$.

(απ. $\alpha = \pm 1$)

11. α. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f\left(\frac{x}{e}\right) = x \cdot \ln x$, δείξτε ότι $f''(e\ln\pi) = \frac{1}{\ln\pi}$.

β. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R^*, για την οποία ισχύει $f(\ln x) = e^x - \ln x$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $f''(\pi) = e^{e^\pi + \pi}\left(e^\pi + 1\right)$.

12. Δίνεται η άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)f(x) + x$, $x \in R$. Να βρεθεί η τιμή του $g'(0)$.

(απ. $g'(0) = 1$)

13. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_o με $g(x_o) \ne 0$ και $g'(x_o) \ne 0$. Ορίζουμε $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, με $F'(x_o) = 0$. Δείξτε ότι $F(x_o) = \frac{f'(x_o)}{g'(x_o)}$.

(ΘΕΜΑ)

14. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f'(x) = 1 + (f(x))^2$, για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι:

i. $\frac{f''(x)}{f'(x)} = 2f(x)$, για κάθε $x \in R$.

ii. $f''(0) = 0$.

iii. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$.

15. Έστω f περιττή συνάρτηση , δυο φορές παραγωγίσιμη στο R , και η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) \cdot f'(x)$. Δείξτε ότι :

i. Η f' είναι άρτια και η f'' περιττή

ii. $f(0) = f''(0) = 0$

iii. $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{f''(x)}{f'(x)}$, $f(x)\cdot f'(x)\neq 0$.

16. Αν ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 πραγματικές και άνισες ρίζες της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$, $\alpha \neq 0)$, να αποδειχθεί ότι:

i. $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-\rho_1}+\dfrac{1}{x-\rho_2}+\dfrac{1}{x-\rho_3}$, $x\neq \rho_1, \rho_2, \rho_3$

ii. $\dfrac{\rho_1}{f'(\rho_1)}+\dfrac{\rho_2}{f'(\rho_2)}+\dfrac{\rho_3}{f'(\rho_3)}=0$

17. Αν η συνάρτηση $f: R\to R$ είναι συνεχής στο 3 και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(5-2x)}{x-1}=-4$.

i. Αποδείξτε ότι: $f(3)=0$

ii. Αποδείξτε ότι: $f(3)=0$

18. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει: $|f(x)-2|\leq|g(x)-1|$. Αν $g(1)=1$ και $g'(1)=0$.

i. Να βρείτε τη τιμή του $f(1)$

ii. Να υπολογίσετε το $f'(1)$. (απ. $f'(1)=0$)

19. Αποδείξτε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o τότε:

i. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=2f'(x_o)$

ii. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0+3h)}{h}=-4f'(x_0)$

iii. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x_0-h)-f^2(x_0)}{h}=-2f(x_0)\cdot f'(x_0)$

20. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$, να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-f(0)\cdot\sqrt{x^2+4}}{x}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)\cdot \sigma\upsilon\nu x}{2f(x)-f(0)\cdot\sqrt{x^2+4}}$ (απ. i) $2f'(0)$, ii) $\dfrac{1}{2}$)

21. i. Αν $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ αποδείξτε ότι: $f^{(\nu)}(x)=\alpha^x(\ln\alpha)^\nu$, $\nu\in N^*$.

ii. Αν $f(x)=e^{\alpha x}$, $\alpha\in R^*$ αποδείξτε ότι $f^{(\nu)}(x)=\alpha^\nu\cdot e^{\alpha x}$.

iii. Αν $f(x)=\ln x$, $x>0$ αποδείξτε ότι: $f^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu-1}\dfrac{(\nu-1)!}{x^\nu}$, $x>0$.

22. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση f βαθμού $\nu\geq 2$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $\rho\in R$ αν και μόνο αν $f(\rho)=f'(\rho)=0$.

Γ. ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά θετικής τεχνολογικής κατεύθυνσης

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΦ. 2ο

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Δημήτρης Αργυράκης **Γεράσιμος Θ. Κουτσανδρέας**

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

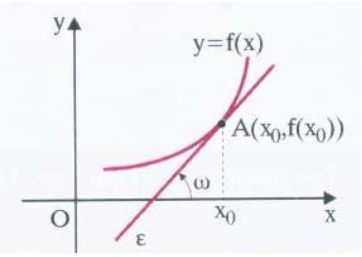
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την ευθεία (ε) που διέρχεται από το Α και έχει κλίση (συντελεστή διεύθυνσης) την $f'(x_0)$, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση

$$(\varepsilon): \ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) με τον άξονα x΄x, τότε ισχύει :



$$f'(x_0) = \lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Α΄ ΟΜΑΔΑ : Περιλαμβάνει ασκήσεις στις οποίες θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης και **γνωρίζουμε το σημείο επαφής**.

Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\left(\sqrt{x} - 3\right)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο:

α. $A(0, f(0))$ **και** **β.** $B(4, f(4))$.

Λύση

α. Για $x > 0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{x} - 3\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x} - 3\right) = -3.$

Άρα η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = -3$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι

(ε_1) : $y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = -3\cdot(x - 0) \Leftrightarrow y = -3x$.

β. Για $x > 0$ έχουμε $f'(x) = \left[x\left(\sqrt{x} - 3\right)\right]' = x'\left(\sqrt{x} - 3\right) + x\left(\sqrt{x} - 3\right)' =$

$$= \sqrt{x} - 3 + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 3 + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

Η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 4$ με $f'(4) = \frac{3}{2}\sqrt{4} - 3 = 0$, επίσης είναι

$f(4) = 4 \cdot \left(\sqrt{4} - 3\right) = -4.$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $B\left(4, f(4)\right)$ είναι

(ε_2) : $y - f(4) = f'(4) \cdot (x - 4) \Leftrightarrow y - (-4) = 0 \cdot (x - 4) \Leftrightarrow y = -4.$

Β΄ ΟΜΑΔΑ : Περιλαμβάνει ασκήσεις στις οποίες θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f και **δεν γνωρίζουμε το σημείο επαφής**.

Στη περίπτωση αυτή θεωρούμε σημείο επαφής $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ και προσδιορίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης, αν πρόκειται για μη κατακόρυφη εφαπτομένη, ή βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης, αν αυτό είναι απαραίτητο.

Στη συνέχεια με κάποια συνθήκη που θα δίνεται στην άσκηση προσδιορίζουμε την τετμημένη x_0 του σημείου επαφής και ότι άλλο απαιτείται.

Άσκηση 1 : ***(Δίνεται έμμεσα ο συντελεστής διεύθυνσης)***

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 8$ οι οποίες

α. είναι παράλληλες προς την ευθεία $\zeta : y = 13x - 7$.

β. είναι κάθετες στην ευθεία $\eta : y = -\frac{1}{4}x + 3$.

γ. σχηματίζουν με τον άξονα x΄x γωνία $\widehat{\omega} = 45°$

Λύση

Για κάθε $x \in R$ έχουμε $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$. Επομένως ορίζεται εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της. Αν $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής και (ε) η εφαπτομένη της C_f στο M, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ_ε της εφαπτομένης είναι

$\lambda_\varepsilon = f'(x_0) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 3x_0^2 - 6x_0 + 4.$

α. ΕίναιQ

$$\varepsilon // \zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 4 = 13 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x_0^2 - 2x_0 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3 \quad \text{ή} \quad x_0 = -1.$$

- Αν $x_0 = 3$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M\left(3, f(3)\right)$ είναι (ε): $y - f(3) = f'(3)\cdot(x-3) \Leftrightarrow y - 20 = 13\cdot(x-3) \Leftrightarrow y = 13x - 19.$
- Αν $x_0 = -1$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M\left(-1, f(-1)\right)$ είναι (ε) : $y - f(-1) = f'(-1)\cdot(x+1) \Leftrightarrow y - 0 = 13\cdot(x+1) \Leftrightarrow y = 13x + 13.$

β. Είναι:

$$\varepsilon \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \left(3x_0^2 - 6x_0 + 4\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 4 = 4 \Leftrightarrow$$

$$3x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow 3x_0\left(x_0 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \quad \text{ή} \quad x_0 = 2.$$

- Αν $x_0 = 0$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M\left(0, f(0)\right)$ είναι (ε) : $y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow y - 8 = 4\cdot(x-0) \Leftrightarrow y = 4x + 8.$
- Αν $x_0 = 2$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M\left(2, f(2)\right)$ είναι (ε) : $y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow y - 12 = 4\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = 4x + 4.$

γ. Είναι

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 45^0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 4 = 1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x_0^2 - 2x_0 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x_0 - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

- Για $x_0 = 1$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M\left(1, f(1)\right)$ είναι (ε) : $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow y - 10 = 1\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = x + 9.$

Άσκηση 2 : ***(Δίνεται σημείο εκτός της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης από το οποίο διέρχεται η εφαπτομένη)***

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης $f(x) = x^3 + x^2 + x$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

Λύση

Για κάθε $x \in R$ έχουμε $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Επομένως ορίζεται εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της. Αν $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής και (ε) η εφαπτομένη της C_f στο M, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

(ε) : $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow y - \left(x_0^3 + x_0^2 + x_0\right) = \left(3x_0^2 + 2x_0 + 1\right)\cdot\left(x - x_0\right)$ (1).

Επειδή $A(0, 1) \in (\varepsilon)$ η εξίσωση (1) επαληθεύεται για $x = 0$ και $y = 1$, οπότε έχουμε:

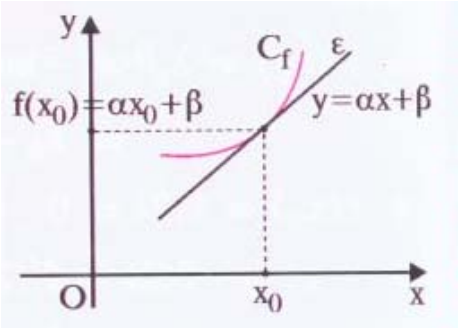
$$1-\left(x_0^3+x_0^2+x_0\right)=\left(3x_0^2+2x_0+1\right)\cdot\left(0-x_0\right)\Leftrightarrow 1-x_0^3-x_0^2-x_0=-3x_0^3-2x_0^2-x_0\Leftrightarrow$$

$$2x_0^3+x_0^2+1=0\Leftrightarrow\left(x_0+1\right)\cdot\left(2x_0^2-x_0+1\right)=0\Leftrightarrow x_0+1=0\Leftrightarrow x_0=-1$$

- Για $x_0=-1$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M\left(-1,f(-1)\right)$ είναι (ε) : $y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)\Leftrightarrow y+1=2\cdot(x+1)\Leftrightarrow y=2x+1.$

Γ΄ ΟΜΑΔΑ: Περιλαμβάνει ασκήσεις στις οποίες θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια ευθεία εφάπτεται στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

Μια ευθεία (ε) με εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , αν και μόνο αν, υπάρχει σημείο $M\left(x_0, f(x_0)\right)$, τέτοιο ώστε :



- η ευθεία (ε) να διέρχεται από το σημείο M και
- η κλίση της ευθείας (ε) στο M να ισούται με την $f'(x_o)$. Δηλαδή:

  Το σύστημα πρέπει $\begin{cases} f(x_0)=\alpha x_0+\beta \\ f'(x_0)=\lambda_\varepsilon=\alpha \end{cases}$ να έχει μια τουλάχιστον λύση ως προς x_o.

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) : y = x + 2 εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-2x+4$.

Λύση

Για κάθε $x\in R$ έχουμε $f'(x)=3x^2-2$, οπότε ορίζεται εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της.

Η ευθεία (ε): y = x + 2 εφάπτεται της C_f στο σημείο $M\left(x_0, f(x_0)\right)$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} M\in(\varepsilon) \\ f'(x_0)=\lambda_\varepsilon \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x_0)=x_0+2 \\ f'(x_0)=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_0^3-2x_0+4=x_0+2 \\ 3x_0^2-2=1 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_0^3-3x_0+2=0 \\ 3x_0^2=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_0^3-3x_0+2=0 \\ x_0^2=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_0^3-3x_0+2=0 \\ x_0=\pm1 \end{cases}\Leftrightarrow x_0=1.$$

Άρα η ευθεία (ε) : y = x +2 εφάπτεται της C_f στο σημείο M(1, 3)

Άσκηση 2 :

Να προσδιορίσετε την τιμή του $\lambda\in R$ για την οποία η ευθεία (ε) : y = x + λ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$.

Λύση

Για κάθε $x \in R$ έχουμε $f'(x) = e^x$, οπότε ορίζεται εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της.

Η ευθεία $(\varepsilon) : y = x + \lambda$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} M \in (\varepsilon) \\ f'(x_0) = \lambda_\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = x_0 + \lambda \\ f'(x_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_0} = x_0 + \lambda \\ e^{x_0} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_0} = x_0 + \lambda \\ e^{x_0} = e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Άρα για $\lambda = 1$ η ευθεία $(\varepsilon) : y = x + 1$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(0, 1)$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$. Να προσδιορίσετε την τιμή του α για την οποία η ευθεία (ε) με εξίσωση : $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης .

Λύση

Για κάθε $x \in R$ έχουμε $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha$, οπότε ορίζεται εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της .

Η ευθεία $(\varepsilon) : y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} M \in (\varepsilon) \\ f'(x_0) = \lambda_\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = x_0 \\ f'(x_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{x_0} = x_0 \\ \alpha^{x_0}\ln\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{x_0} = x_0 \\ x_0\ln\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{x_0} = x_0 \\ \ln\alpha^{x_0} = 1 \end{cases}$$

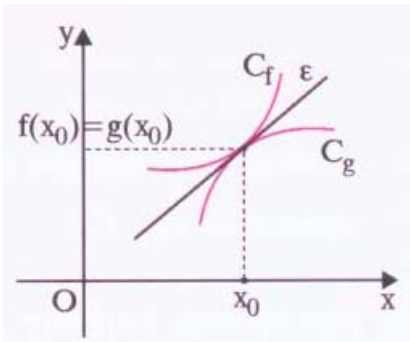
$$\begin{cases} \alpha^{x_0} = x_0 \\ \ln x_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{x_0} = x_0 \\ \ln x_0 = \ln e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^e = e \\ x_0 = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e\ln\alpha = 1 \\ x_0 = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\alpha = \frac{1}{e} \\ x_0 = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = e^{\frac{1}{e}} \\ x_0 = e. \end{cases}$$

Άρα για $\alpha = e^{\frac{1}{e}}$ η ευθεία $(\varepsilon) : y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(e, e)$.

Δ΄ ΟΜΑΔΑ: Περιλαμβάνει ασκήσεις στις οποίες θέλουμε να αποδείξουμε ότι δύο γραφικές παραστάσεις δέχονται κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο.

Οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g δύο συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, δέχονται **κοινή μη κατακόρυφη εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο** με τετμημένη x_0, αν και μόνο αν

$$f(x_0) = g(x_0) \text{ και } f'(x_0) = g'(x_0)$$



Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x$ και $g(x)=4-4e^{-x}$ δέχονται κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο.

Λύση

Για κάθε $x \in R$ έχουμε $f'(x)=e^x$ και $g'(x)=4e^{-x}$. Οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα , δέχονται κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0, αν και μόνο αν, το σύστημα $\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$ έχει μια τουλάχιστον λύση ως προς x_0.

Είναι $\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_0}=4-4e^{-x_0} \\ e^{x_0}=4e^{-x_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_0}=4-e^{x_0} \\ e^{x_0}=4e^{-x_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{x_0}=4 \\ e^{2x_0}=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$e^{x_0}=2 \Leftrightarrow x_0=\ln 2.$

Είναι $f(x_0)=f(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$. Άρα οι C_f και C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $M(\ln 2, 2)$.

Άσκηση 2

Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in R$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sigma\upsilon\nu(\pi x)-\alpha$ και $g(x)=x^2+3\beta x+1$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

Λύση

Για κάθε $x \in R$ έχουμε $f'(x)=-\pi\eta\mu(\pi x)$ και $g'(x)=2x+3\beta$. Οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα , δέχονται κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0=1$, αν και μόνο αν,

$$\begin{cases} f(1)=g(1) \\ f'(1)=g'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-\alpha=2+3\beta \\ 0=2+3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Ε΄ ΟΜΑΔΑ: Περιλαμβάνει ασκήσεις στις οποίες θέλουμε να αποδείξουμε ότι δύο γραφικές παραστάσεις δέχονται κοινή εφαπτομένη όχι όμως σε κοινό τους σημείο.

Έστω ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται στις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g δύο συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ με $\alpha \neq \beta$ αντίστοιχα .

Είναι :

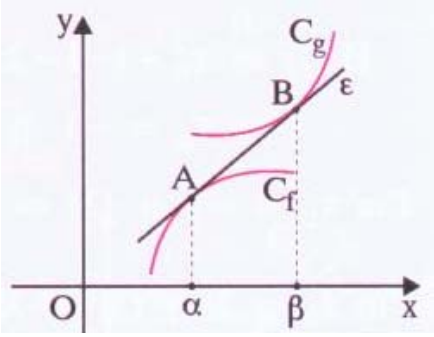
- $(\varepsilon): \ y - f(\alpha) = f'(\alpha)\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow$

  $y = f'(\alpha)\cdot x + f(\alpha) - \alpha\cdot f'(\alpha)$

- $(\varepsilon): \ y - g(\beta) = g'(\beta)\cdot(x-\beta) \Leftrightarrow$

  $y = g'(\beta)\cdot x + g(\beta) - \beta\cdot g'(\beta)$

  Η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g, αν και μόνο αν, ισχύουν



$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ f(\alpha) - \alpha\cdot f'(\alpha) = g(\beta) - \beta\cdot g'(\beta) \end{cases}$$

Άσκηση

Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = \dfrac{1}{x}$ και $g(x) = -x^2$.

Λύση

Για κάθε $x \in R^*$ έχουμε $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, οπότε ορίζεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f. Για κάθε $x \in R$ έχουμε $g'(x) = -2x$, οπότε ορίζεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_g.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha \neq 0$ είναι

$$(\varepsilon): \ y - f(\alpha) = f'(\alpha)\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow y - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}(x-\alpha) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\alpha^2}x + \frac{2}{\alpha}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $B(\beta, g(\beta))$ είναι

$$(\varepsilon): \ y - g(\beta) = g'(\beta)\cdot(x-\beta) \Leftrightarrow y - (-\beta^2) = -2\beta(x-\beta) \Leftrightarrow y = -2\beta x + \beta^2$$

Η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g, αν και μόνο αν, ισχύουν

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha^2} = -2\beta \\ \dfrac{2}{\alpha} = \beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{2\alpha^2} \\ \dfrac{2}{\alpha} = \dfrac{1}{4\alpha^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{2\alpha^2} \\ \alpha^3 = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{2\alpha^2} \\ \alpha = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Επομένως $A\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ και $B(2, -4)$ είναι τα σημεία επαφής της κοινής εφαπτομένης (ε) με τις C_f και C_g αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): \ y - g(2) = g'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow y - (-4) = -4\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = -4x + 4.$$

Ασκήσεις για λύσεις

23. α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο αντίστοιχο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, όταν

i. $f(x) = x\sqrt{x}$, $x_o = 4$

ii. $f(x) = x\ln x$, $x_o = 1$

iii. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x_o = 2$

απ. i. $y = 3x - 4$, ii. $y = x - 1$, iii. $y = -2x + 7$

β. Αποδείξτε ότι ο άξονας x΄x είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$, στο σημείο της $M(0, f(0))$.

γ. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2 - 6x + 2$ στα οποία η εφαπτομένη είναι:

i. παράλληλη προς την ευθεία $y = 6x + 5$

ii. κάθετη προς την ευθεία $y = -\dfrac{1}{3}x + 4$.

(απ. i. A(6, 2) , ii. B(9/2 , –19/4))

δ. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45°;

(απ. A(1, 3))

ε. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$,να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η ευθεία $y = 3x + 2$ να είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο της M(1,5).

(απ. α=1 , β = 3)

στ. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \dfrac{x^2+4}{8}$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_o = 2$.

ζ. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ∈R ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $g(x) = -x^2 + 3x - 4$ στο σημείο A(3,–4) να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ στο σημείο B(1, 2).

(απ. A = –5 , β = 6)

η. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x + \sqrt{x}$ που διέρχεται από το σημείο M(0 ,1/2).

(απ. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$)

θ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 2$. Έστω A , B τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το σημείο M(1,-3) . Αποδείξτε ότι η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = x - 2$.

ι. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ και τα σημεία της γραφικής της παράστασης O(0 , 0) και M (π , 0). Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τη χορδή OM και τις εφαπτόμενες της C_f στα σημεία O και M.

(απ. $E = \pi^2/4$)

24. α. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f και έστω $y = 2x + 3$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A(3, f(3)). Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = f(x^2 + x + 1)$ στο σημείο της B(1, g(1)). (απ. $y = 6x + 3$)

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της M(–1,6). (απ. $y = -5x + 1$)

γ. Δίνεται η συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $|f(x) - \ln x| \le (x-1)^2$, για κάθε $x > 0$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A(1, f(1)).

(απ. $y = x - 1$)

δ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2 & , \quad x < 1 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma & , \quad x \ge 1 \end{cases}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο M(2, 3). Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , αν γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_o = 1$.

απ. $(\alpha = -8, \beta = 22, \gamma = -9 \ , \ y = 6x - 1)$

ε. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει $2f(x^2) + xf(x-1) + x^{20} + 2 = 0,\ x \in R$. Υποθέτουμε ότι η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x) + e^{x-1},\ x \in R$, έχει στο σημείο A(1, g(1)) εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M(0, f(0)) να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $(\lambda + 20)x + 2y - 3 = 0$.

(απ. λ=10)

στ. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$. Δείξτε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ στο σημείο που η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$, είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας xOy .

ζ. Έστω η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)},\ x \in R$. Αν η C_g τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A , αποδείξτε ότι η εφαπτόμενη της C_g στο A είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x + y + 10 = 0$. (ΘΕΜΑ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Να λυθούν τα ερωτήματα (στ) και (ζ) , αν η f είναι απλώς παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο.

25. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R , για τις οποίες ισχύει $f(x) = g(x^2 + 2^x)$. Αν η ευθεία $x - y - 1 = 0$ εφάπτεται της C_g στο σημείο A(3 g(3)), α βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο B (1, f(1)).

(απ. $y = (2 + 2\ln 2)x - 2\ln 2$) (ΘΕΜΑ)

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \ln x,\ x > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(ΘΕΜΑ)

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$. Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $x_o = 3$. (Θεωρούμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη). (απ. $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$)

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

27. Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τον τύπο $s(t) = 4t^3 - 27t^2 - 30t + 6$.

α. Να βρείτε την ταχύτητα του κινητού.

β. Να βρείτε την αρχική ταχύτητα.

γ. Ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα είναι 0 ;

δ. Να βρεθεί η επιτάχυνση του κινητού κατά τη χρονική στιγμή που έχει ταχύτητα υ = 36 m/sec.

(απ. **α.** $\upsilon(t)= s'(t)$, **β.** $\upsilon(0)= -30$ m/sec , **γ.** $t_0=5$ sec **δ.** $\upsilon'(11/2) = 78$ m/sec^2)

28. Η αντίδραση y ενός ασθενούς σε ένα φάρμακο, συνδέεται με την ποσότητα x του φαρμάκου που του χορηγείται και από τη διάρκεια t της θεραπείας , με τη σχέση $y = x\eta\mu t^2 - e^{xt^2}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του y όταν:

α. μεταβάλλεται η ποσότητα του φαρμάκου x,

β. μεταβάλλεται η διάρκεια της θεραπείας

29. Η πλευρά α ενός κύβου αυξάνεται με ταχύτητα 3 cm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του , κατά τη χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 10 cm. (απ. 900 cm^3/sec)

30. Δίνονται τα σημεία A(x + 2 , 0) και B(0 , lnx) , x > 1. Αν το x μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου με ρυθμό 2 cm/sec , να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB (O η αρχή των αξόνων) , τη χρονική στιγμή που το σημείο A έχει τετμημένη 10 cm.

(απ. ln8 +5/4 cm^2/sec)

31 Δύο σημεία A(χ,0) και B(0,ψ) απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων κινούμενα πάνω στους ημιάξονες οχ και οψ αντίστοιχα, με ταχύτητες 3 cm/sec και 5 cm/sec αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης AB κατά τη χρονική στιγμή που είναι A(8,0) και B(0,6).

(απ. 5,4 cm/sec)

32. Ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μία αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει $g(x)$ μονάδες του παραγόμενου προιόντος.

Αν $g(x) = M_o + M\left(1 - e^{-\mu x}\right)$, $x \geq 0$ όπου M_o, M , μ θετικές σταθερές.

Να εκφράσετε το ρυθμό του παραγόμενου προιόντος ως συνάρτηση του g(x).

Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_o ;

(απ. $g'(x) = -\mu\left(g(x) - M_o - M\right), M_o = g(0)$ (ΘΕΜΑ 1998)

33. Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10cm του οποίου τα άκρα A , B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως. Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 2cm/sec$ και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση $s(t) = \upsilon t$, $t \in [0, 5]$ όπου t ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα).

α. Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.

β. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6cm;

(απ. **α.** $E(t) = 2t\sqrt{25 - t^2}$, **β.** $E'(4) = -\frac{14}{3}\ cm^2/sec$) (ΘΕΜΑ 1993)

34. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x,\ x > 0$.

Α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M (α, f(α)) και να προσδιορίσετε το σημείο τομής A, της εφαπτομένης με τον άξονα $x'x$.

Β. Έστω ότι ένα κινητό με τις συντεταγμένες του M κινείται πάνω στη C_f. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του M συναρτήσει του χρόνου είναι $\alpha'(t) = 2\alpha(t)$, να βρείτε:

i. Το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου τομής A της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M με τον άξονα x΄x τη χρονική στιγμή που το M έχει τετμημένη e.

ii. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη αυτή με τον άξονα x΄x την ίδια χρονική στιγμή (δηλ. όταν $\alpha'(t) = 2\alpha(t)$ και $\alpha(t) = e$).

(απ . **Β. i.** $-2e\ \frac{\mu.\mu\eta\kappa o\upsilon\varsigma}{\mu.\chi\rho o\nu o\upsilon}$, **ii.** $\frac{-2e}{1+e^2}\ \frac{rad}{s}$) (ΘΕΜΑ)

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^3$. Ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων κινούμενη στον θετικό ημιάξονα Ox με ταχύτητα 1 cm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M με τον άξονα x΄x, τη χρονική στιγμή που αυτή είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 5$ (απ. 3/5 rad/sec)

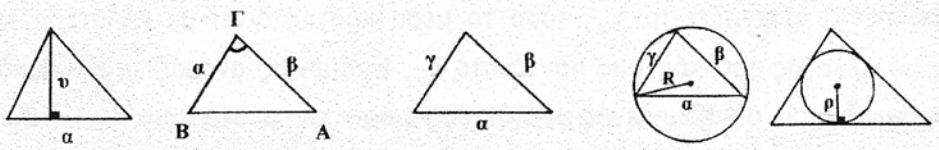
.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

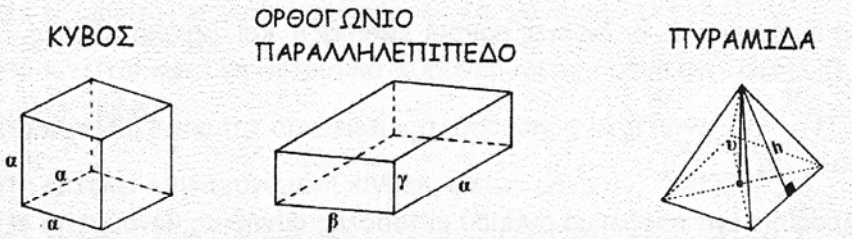
$E = \alpha^2$ $\quad E = \alpha\beta$ $\quad E = \alpha\upsilon$ $\quad E = \frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2}$ $\quad E = \frac{\alpha\beta}{2}$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ



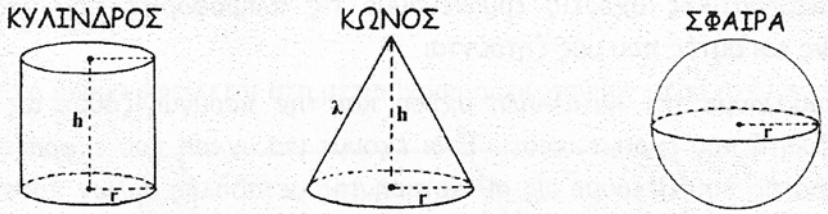
$E = \frac{\alpha\upsilon}{2}$ $\quad E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$ $\quad E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ $\quad E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ $\quad E = \tau\rho$

ΕΜΒΑΔΑ ΚΑΙ ΟΓΚΟΙ ΣΤΕΡΕΩΝ



$E = 6\alpha^2$ $\quad E = 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ $\quad E = E_{\text{Βάσης}} + \frac{\Pi_{\text{Βάσης}}\cdot h}{2}$

$V = \alpha^3$ $\quad V = \alpha\beta\gamma$ $\quad V = \frac{E_{\text{Βάσης}}\cdot\upsilon}{3}$



$E = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ $\quad E = \pi r\lambda + \pi r^2$ $\quad E = 4\pi r^2$

$V = \pi r^2 h$ $\quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Γ. ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΦ. 2Ο

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- ***ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE – ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (Θ.Μ.Τ.)***
- ***ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ.***

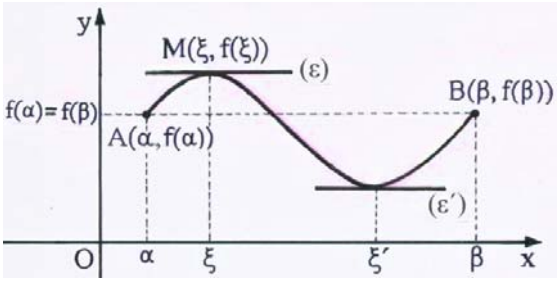
ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE – ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (Θ.Μ.Τ.)

Θεώρημα Rolle:

Αν μια συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.



Γεωμετρική ερμηνεία

Είναι $\left.\begin{array}{l} f'(\xi) = 0 \\ \lambda_\varepsilon = f'(\xi) \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \varepsilon \,//\, x'x$, δηλαδή:

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Παρατηρήσεις:

1. Για να ισχύει το Θεώρημα Rolle πρέπει να ισχύουν απαραιτήτως και οι τρεις προϋποθέσεις του.
2. Δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος Rolle.
3. Το Θεώρημα Rolle μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f'(x) = 0$, χωρίς όμως να μας την προσδιορίζει πάντα.
4. Το Θεώρημα Rolle εφαρμόζεται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
5. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε ισχύει το Θεώρημα Rolle, αφού η παραγωγισιμότητα της f στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ καλύπτει και τη συνέχεια της f στο διάστημα αυτό.
6. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, τότε:
   - Μεταξύ δύο διαδοχικών πραγματικών ριζών της f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f΄.

- Μεταξύ δύο διαδοχικών πραγματικών ριζών της f' υπάρχει μια το πολύ ρίζα της f.

7. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, τότε η f είναι « 1 – 1 ».

<u>Παρατήρηση:</u> οι αποδείξεις των 6 , 7 να θεωρηθούν ως ασκήσεις.

Θεώρημα Μέσης Τιμής:

Αν μια συνάρτηση f είναι

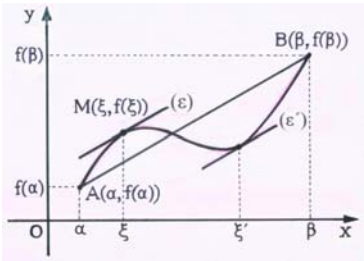
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Γεωμετρική ερμηνεία

Είναι

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \\ f'(\xi) = \lambda_\varepsilon \\ \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \lambda_{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \varepsilon \,//\, AB,$$



Άρα αν για μια συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην χορδή AB.

Παρατηρήσεις

1. Για να ισχύει το Θ.Μ.Τ. πρέπει να ισχύουν απαραιτήτως και οι δύο προϋποθέσεις του.

2. Δεν ισχύει το αντίστροφο του Θ.Μ.Τ.

3. Το Θ.Μ.Τ. εφαρμόζεται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

4. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει το Θ.Μ.Τ. αφού η παραγωγισιμότητα της f στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ καλύπτει και τη συνέχεια της f στο διάστημα αυτό.

5. Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε από τη σχέση $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ προκύπτει ότι $f'(\xi) = 0$, δηλαδή ισχύει το Θεώρημα Rolle. Επομένως το Θεώρημα Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θ.Μ.Τ.

6. Αν $f(\alpha) < f(\beta)$ τότε $f'(\xi) > 0$, οπότε η (ε) σχηματίζει με τον άξονα x΄x οξεία γωνία.

7. Αν $f(\alpha) > f(\beta)$ τότε $f'(\xi) < 0$, οπότε η (ε) σχηματίζει με τον άξονα x΄x αμβλεία γωνία.

Παραδείγματα:

Α΄ ΟΜΑΔΑ :

Περιλαμβάνει παραδείγματα στα οποία:

- Ελέγχουμε αν ισχύει το Θεώρημα Rolle ή το Θ.Μ.Τ.
- Προσδιορίζουμε παραμέτρους ώστε να ισχύει το Θεώρημα Rolle ή το Θ.Μ.Τ.
- Αποδεικνύουμε ανισότητες (διπλές) με το Θ.Μ.Τ.

(βλέπε ασκ. 3 σελ. 249 σχολ. Βιβλίου)

Παράδειγμα 1:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 5x^2+2x+1 \ , \ x \le 0 \\ x^3+2x+1 \ , \ x > 0 \end{cases}$. **Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα** $[-1, 1]$ **και να βρείτε** $\xi \in (-1, 1)$ **τέτοιο, ώστε** $f'(\xi) = 0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ άρα και στο $[-1, 0)$ με

$f'(x) = 10x + 2$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και στο $(0, 1]$ με

$f'(x) = 3x^2 + 2$.

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$.

Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+2x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(5x+2)}{x}=\lim_{x\to 0}(5x+2)=2$$

Για $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+2)}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2+2)=2$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ με $f'(0) = 2$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$ με $f'(x)=\begin{cases} 10x+2 \ , \ \text{αν} \ -1 \le x \le 0 \\ 3x^2+2 \ , \ \text{αν} \ 0 < x \le 1 \end{cases}$. Επίσης είναι

$f(-1) = f(1) = 4$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Έχουμε : $\begin{cases} 10\xi + 2 = 0 \ , \quad \xi \in (-1, 0) \\ \qquad \text{ή} \\ 3\xi^2 + 2 = 0 \ , \quad \xi \in (0, 1) \end{cases} \Leftrightarrow \xi = -\dfrac{1}{5}$

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 2 \ , \ x \le 0 \\ x^2 + \gamma \quad , \ x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in R$, ώστε η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.

Λύση

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ άρα και στο $[-1, 0)$ ως πολυωνυμική.

  Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα και στο $(0, 1]$ ως πολυωνυμική.

  Για να είναι η f συνεχής στο $[-1, 1]$ πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_o = 0$.
  δηλαδή $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \gamma = 2$. Άρα η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ όταν $\gamma = 2$.

- Πρέπει $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow \alpha - \beta + 2 = 1 + \gamma \overset{\gamma = 2}{\Leftrightarrow} \beta = \alpha - 1$, οπότε

  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + (\alpha - 1)x + 2 \ , \ x \le 0 \\ x^2 + 2 \quad , \ x > 0 \end{cases}$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ άρα και στο $(-1, 0)$ με $f'(x) = 2\alpha x + \alpha - 1$.

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και στο $(0, 1)$ με $f'(x) = 2x$.

  Για να είναι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ πρέπει να είναι παραγωγίσιμη και στο $x_o = 0$, δηλαδή $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

  Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

  $$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha x^2 + (\alpha - 1)x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(\alpha x + \alpha - 1)}{x} =$$

  $$\lim_{x \to 0} (\alpha x + \alpha - 1) = \alpha - 1$$

  Για $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0} x=0$$

Πρέπει $\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο (–1, 1) όταν α = 1. Επομένως η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, όταν:

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=\alpha-1\\ \gamma=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=0\\ \gamma=2\end{cases}$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}4\sqrt{x+3}\ , & -3\le x\le 1\\ x+7\ , & x>1\end{cases}$. Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[-2,5]$ και στη συνέχεια να βρείτε σημείο Μ της C_f, όπου η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ, με $A(-2,4)$ και $B(5,12)$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (–3, 1) άρα και στο [–2, 1) με $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ άρα και στο $(1,\ 5]$ με $f'(x)=1$.

Για να είναι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2,5]$ πρέπει να είναι παραγωγίσιμη και στο $x_o=1$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Για $x\in(-3,\ 1)$ είναι:

$$\lim_{x®1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{x+3}-8}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x-1}=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{4}{\sqrt{x+3}+2}=1$$

Για $x\in(1,+\infty)$ είναι:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+7-8}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ με $f'(1)=1$.

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2,5]$ με $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{x+3}}\ , & \text{αν } -2\le x\le 1\\ 1\ , & \text{αν } 1<x\le 5\end{cases}$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο

διάστημα $[-2, 5]$, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-2, 5)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(5)-f(-2)}{5-(-2)} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{12-4}{7} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{8}{7}.$$

Έχουμε : $\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\xi+3}} = \dfrac{8}{7}, \text{ αν } -2 \le \xi \le 1 \\ \text{ή} \\ 1 = \dfrac{8}{7}, \text{ αν } 1 < \xi \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \xi = \dfrac{1}{16}$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(\frac{1}{16}, 7\right)$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ:

(Περιλαμβάνει παραδείγματα στα οποία μας ζητούν να βρούμε το πλήθος ριζών εξίσωσης)

1η περίπτωση (Μια τουλάχιστον ρίζα)

Για να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει **μια τουλάχιστον ρίζα** στο (α, β) ελέγχουμε αν:

- Υπάρχει προφανής ρίζα της f στο (α, β).
- Εφαρμόζεται το Θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ για τη συνάρτηση f
- Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών $f((\alpha, \beta))$ της f.
- Εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για μια αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f

(Μην ξεχνάτε ότι ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα . γιατί ;)

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $6x^2 + 2\alpha x = \alpha + 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$ για κάθε $\alpha \in R$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 6x^2 + 2\alpha x - (\alpha + 2)$, $x \in R$..

Μια παράγουσα της f στο R είναι η συνάρτηση $F(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - (\alpha + 2)x$, $x \in R$.

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ με $F'(x) = f(x)$. Επίσης είναι $F(0) = F(1) (= 0)$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι στο $[0, 1]$

η συνάρτηση F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi)=0$.

Παρατήρηση: Παρατηρήστε ότι το προηγούμενο παράδειγμα δεν μπορούσε να λυθεί με καμία άλλη μέθοδο.

2η περίπτωση (Το πολύ μια ρίζα)

Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει **το πολύ μια ρίζα** ακολουθούμε την εξής μέθοδο.

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης σ' ένα μέλος, συνήθως στο πρώτο, αν δε βρίσκονται ήδη στο μέλος αυτό.
- Θεωρούμε συνάρτηση f με τύπο ίσο με το πρώτο μέλος της εξίσωσης.
- Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$.
- Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος

  Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$, το οποίο και θα είναι άτοπο.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{2\nu+1} + \alpha = (2\nu+1)x$, $\nu \in N^*$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$ για κάθε $\alpha \in R$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$f(x) = x^{2\nu+1} - (2\nu+1)x + \alpha$, $x \in R$, $\nu \in N^*$ και $\alpha \in R$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1)$ με $\rho_1 < \rho_2$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\rho_1, \rho_2] \subseteq [-1, 1]$ με

$f'(x) = (2\nu + 1)x^{2\nu} - (2\nu + 1)$.

Επίσης

$f(\rho_1) = f(\rho_2)(=0)$, άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[\rho_1, \rho_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow (2\nu+1)\xi^{2\nu} - (2\nu+1) = 0 \Leftrightarrow \xi^{2\nu} = 1 \Leftrightarrow \xi = \pm 1$ π

ου είναι άτοπο αφού $-1 < \xi < 1$.

Άρα η εξίσωση έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

3η περίπτωση (Το πολύ δύο ρίζες)

Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει **το πολύ δύο ρίζες** ακολουθούμε την εξής μέθοδο.

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης σ' ένα μέλος, συνήθως στο πρώτο, αν δε βρίσκονται ήδη στο μέλος αυτό.
- Θεωρούμε συνάρτηση f με τύπο ίσο με το πρώτο μέλος της εξίσωσης.
- Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.
- Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle σε δύο διαστήματα στα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=0$. Στο σημείο αυτό ίσως να καταλήξουμε σε άτοπο, αν όχι, τότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f' στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $t\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(t)=0$, το οποίο φυσικά και θα είναι άτοπο.

Παράδειγμα :

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^8-2008=32x$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο R.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^8-32x-2008$, $x\in R$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ με $f'(x)=8x^7-32$.

Επίσης $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)(=0)$, άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle σε δύο διαστήματα στα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=0$. Είναι προφανές ότι $\xi_1\neq\xi_2$, αφού ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα. Βρήκαμε λοιπόν δύο τουλάχιστον ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ το οποίο είναι άτοπο, αφού η εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow 8x^7-32=0\Leftrightarrow x^7=4$

είναι διωνυμική περιττού βαθμού, οπότε έχει πάντοτε μια μόνο ρίζα. Άρα η εξίσωση έχει το πολύ δύο ρίζες στο R.

4η περίπτωση (Μια ακριβώς ρίζα)

Για να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **μια ακριβώς ρίζα** κάνουμε τα εξής:

- Εξασφαλίζουμε την ύπαρξη **μιας τουλάχιστον ρίζας** της εξίσωσης, εφαρμόζοντας μια από τις τέσσερις μεθόδους που αναφέραμε στη 1η περίπτωση.
- Αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση έχει το **πολύ μια ρίζα** ακολουθώντας τη μέθοδο που αναλύσαμε στην 2η περίπτωση ή βασιζόμαστε στη μονοτονία της f μια μέθοδο που θα αναλύσουμε σε επόμενη ενότητα ή χρησιμοποιούμε το « 1 – 1 » της f .

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + x = \alpha$ **έχει ακριβώς μια ρίζα στο** $(0,+\infty)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x + x - \alpha$, $x \in (0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(\ln x + x - \alpha) = -\infty$, που σημαίνει ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,\delta)$, οπότε $f(\kappa) < 0$ με $\kappa \in (0,\delta)$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x + x - \alpha) = +\infty$, που σημαίνει ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (M, +\infty)$, οπότε $f(\lambda) > 0$ με $\lambda \in (M, +\infty)$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\kappa,\lambda] \subseteq (0,+\infty)$, ως άθροισμα συνεχών.
- $f(\kappa)\cdot f(\lambda) < 0$

Επομένως η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[\kappa,\lambda]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\kappa,\lambda) \subseteq (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=0$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (0,+\infty)$ με $\rho_1 < \rho_2$ μια από τις οποίες είναι η ξ και παρατηρούμε ότι:

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\rho_1,\rho_2] \subseteq (0,+\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}$$

- $f(\rho_1) = f(\rho_2)(=0)$.

Άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[\rho_1, \rho_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $t \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{t+1}{t} = 0 \Leftrightarrow t = -1,$$ που είναι άτοπο, αφού $t \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, +\infty)$.

Άρα ο αριθμός ξ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\ln x + x = \alpha$ στο $(0, +\infty)$.

5η περίπτωση (Δύο ακριβώς ρίζες)

Για να αποδείξουμε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει **δύο ακριβώς ρίζες** κάνουμε τα εξής:

- Εξασφαλίζουμε την ύπαρξη **δύο τουλάχιστον ριζών** της εξίσωσης, εφαρμόζοντας (δύο φορές κάποια από τις τέσσερις μεθόδους που αναφέραμε στη 1η περίπτωση ή ένα συνδυασμό δύο εξ' αυτών).
- Αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση έχει το **πολύ δύο ρίζες** ακολουθώντας τη μέθοδο που αναλύσαμε στην 3η περίπτωση ή βασιζόμαστε στη μονοτονία της f μια μέθοδο που θα αναλύσουμε σε επόμενη ενότητα.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \sigma\upsilon\nu x = x\,\eta\mu\, x$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - x\,\eta\mu\, x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Παρατηρούμε ότι:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-\pi, 0]$ και $[0, \pi]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $f(-\pi)f(0) = (\pi^2+1)\cdot(-1) = -\pi^2 - 1 < 0$ και

  $f(0)f(\pi) = (-1)\cdot(\pi^2+1) = -\pi^2 - 1 < 0$

Άρα η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano σε δύο διαστήματα, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi_1) = 0$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi_2) = 0$.

Είναι προφανές ότι $\xi_1 \neq \xi_2$, αφού ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα. Βρήκαμε λοιπόν δύο τουλάχιστον ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in (-\pi, \pi)$ με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ δύο από τις οποίες είναι οι ξ_1, ξ_2.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$ με $f'(x) = x(2 - \sigma\upsilon\nu x)$.

Επίσης $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3)(=0)$, άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle σε δύο διαστήματα στα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$ οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $t_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(t_1) = 0$ και ένα τουλάχιστον $t_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(t_2) = 0$.

Είναι προφανές ότι $t_1 \neq t_2$, αφού ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα. Βρήκαμε λοιπόν δύο τουλάχιστον ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$, που είναι άτοπο αφού η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 - \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ έχει μια μόνο ρίζα.

Άρα η εξίσωση $x^2 - \sigma\upsilon\nu x = x\,\eta\mu x$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $(-\pi, \pi)$.

Γ΄ ΟΜΑΔΑ:

Περιλαμβάνει παραδείγματα στα οποία θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ, που ανήκει σε ένα διάστημα, ώστε να ισχύει μια ισότητα στην οποία εμφανίζονται τα $f(\xi)$, $f'(\xi)$, $f''(\xi)$ και ενδεχομένως κάποιες άλλες αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν το ξ.

Στις ασκήσεις αυτές συνήθως ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

- Αφού εκτελέσουμε τις πράξεις που απαιτούνται, μεταφέρουμε όλους τους όρους σε ένα μέλος, συνήθως στο πρώτο, αν δε βρίσκονται ήδη στο μέλος αυτό και θέτουμε όπου ξ το x.
- Γράφουμε την ισότητα στη μορφή $F'(x) = 0$.
- Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle και καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Σχόλιο

Επειδή οι ασκήσεις αυτής της κατηγορίας είναι κατά γενική ομολογία αρκετά δύσκολες και απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή της συνάρτησης , κρίνουμε σκόπιμο να αναφέρουμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ	ΠΡΟΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΟ ΠΡΟΧΕΙΡΟ	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ F
$f'(\xi)=\lambda$	$f'(x)=\lambda \Leftrightarrow \left(f(x)-\lambda x\right)'=0$	$F(x)=f(x)-\lambda x$
$f'(\xi)=\nu\xi^{\nu-1}$	$f'(x)=\nu x^{\nu-1} \Leftrightarrow \left(f(x)-x^{\nu}\right)'=0$	$F(x)=f(x)-x^{\nu}$
$f'(\xi)(\lambda-\xi)=f(\xi)$	$f'(x)(\lambda-x)=f(x) \Leftrightarrow$ $f'(x)\cdot(\lambda-x)+f(x)\cdot(\lambda-x)'=0$	$F(x)=f(x)\cdot(\lambda-x)$
$f'(\xi)\cdot(\xi-\lambda)=f(\xi)$	$f'(x)\cdot(x-\lambda)=f(x) \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x-\lambda}\right)'=0$	$F(x)=\frac{f(x)}{x-\lambda}$
$\xi f'(\xi)=\nu f(\xi)$	$xf'(x)=\nu f(x) \Leftrightarrow$ $x^{\nu}f'(x)-\nu x^{\nu-1}f(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^{\nu}}\right)'=0$	$F(x)=\frac{f(x)}{x^{\nu}}$
$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\sigma\varphi\xi=0$	$\frac{f'(x)}{f(x)}+\sigma\varphi x=0 \Leftrightarrow \left(f(x)\,\eta\mu x\right)'=0$	$F(x)=f(x)\cdot\eta\mu x$
$F(x)=f(x)\cdot e^{\lambda x}$	$f'(x)+\lambda f(x)=0 \Leftrightarrow$ $f'(x)e^{\lambda x}+e^{\lambda x}\lambda f(x)=0 \Leftrightarrow$ $\left(f(x)e^{\lambda x}\right)'=0$	$F(x)=f(x)e^{\lambda x}$
$f(\xi)+f''(\xi)=0$	$f(x)+f''(x)=0 \Leftrightarrow$ $2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=0 \Leftrightarrow$ $\left[f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2\right]'=0$	$F(x)=f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2$

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\sigma\varphi\xi=0.$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=f(x)\,\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$.

Παρατηρούμε ότι:

- Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$, με

  $F'(x) = f'(x)\,\eta\mu\, x + f(x)\,\sigma\upsilon\nu\, x$

- $F(0) = F(\pi) = 0$

Άρα η συνάρτηση F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\,\eta\mu\,\xi + f(\xi)\,\sigma\upsilon\nu\,\xi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)\,\eta\mu\,\xi + f(\xi)\,\sigma\upsilon\nu\,\xi}{f(\xi)\,\eta\mu\,\xi} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \sigma\varphi\xi = 0.$$

Παράδειγμα 2

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$ για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = e^{-\lambda x} f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Παρατηρούμε ότι:

- Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως γινόμενο συνεχών.
- Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), με

  $F'(x) = -\lambda e^{-\lambda x} f(x) + e^{-\lambda x} f'(x)$

- $F(\alpha) = F(\beta) = 0$

Άρα η συνάρτηση F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\lambda e^{-\lambda\xi} f(\xi) + e^{-\lambda\xi} f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-\lambda\xi}\left(-\lambda f(\xi) + f'(\xi)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) - \lambda f(\xi) = 0 - f'(\xi) = \lambda f(\xi).$$

Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + k^2$, $k \in R$. Αποδείξτε ότι για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-2, 2]$ και να υπολογίσετε το $x_o \in (-2, 2)$ για το οποίο ισχύει $f(x_o)$.

(απ. $x_o = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3} \in (-2, 2)$)

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{\alpha - \beta}{2}x^2 + \left(\frac{\beta}{2} + 2\gamma\right)x + \alpha^2$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Αν ισχύει $2 + 3\alpha + 12\gamma = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $x_o \in (0, 1)$, τέτοιος ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_o, f(x_o))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και ισχύει $f(1) = e \cdot f(0)$, $f(0) \neq 0$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό k ώστε να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $g(x) = e^{x^2 + kx} f(x)$ στο διάστημα $[0,1]$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε να ισχύει $f'(x_o) = 2(1 - x_o)f(x_o)$.

(απ. $k = -2$)

4. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f(1) = f(0) + k$, $k \in R$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_o \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = k$.

5. Α. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

i. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu 2x \cdot f(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii. Δείξτε ότι υπάρχει $x_o \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε να ισχύει $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = -2\sigma\varphi 2x_0$.

Β. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\beta) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x - \alpha)^2 f(x)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \dfrac{2}{\alpha - \xi}$.

6. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Αν $f(1) = 0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

8. Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) με $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και $f(\alpha) = g(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) για την οποία ισχύει $f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2\xi$.

10. Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν είναι $g(\alpha) - g(\beta) = \ln\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = g'(\xi)$.

11. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν ισχύει $\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi)f''(\xi) = \left[f'(\xi)\right]^2$.

12. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f'(x) = 0$ περιέχεται το πολύ μία ρίζα της $f(x) = 0$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = e^x f(x)$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\alpha - \beta = \ln f(\beta) - \ln f(\alpha)$, αποδείξτε ότι:

i. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

ii. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ περνά από το $B(1, \xi f(\xi))$.

iii. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $g''(\xi) = 0$, τότε $f(\xi) = f''(\xi)$.

14. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [0 , 1] και παραγωγίσιμη στο (0 , 1) με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

15. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 \cdot f(x)$ όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R.

i. Αποδείξτε ότι $h'(x) = 3\dfrac{h(x)}{x} + x^3 \cdot f'(x)$, $x \neq 0$.

ii. Αν ρ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, $\rho \neq 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in R^*$ ώστε $f'(\xi) = -\dfrac{3}{\xi} f(\xi)$.

16. Θεωρούμε τη συνάρτηση f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(\xi) \cdot f''(\xi) = -[f'(\xi)]^2$

17. **i.** Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 - \mu x^2 + 3\mu^2 x - 1 = 0$, έχει ακριβώς μία πραγματική και απλή ρίζα.

ii Δείξτε ότι η εξίσωση $x^7 + x^5 + x^3 + x = \lambda^2(\alpha - x) + \mu^2(\beta - x) + \nu^2(\gamma - x)$, έχει το πολύ μία ρίζα στο R.

iii. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in R$ με $\alpha^2 < 3\beta$, δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο R.

iv. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x = \dfrac{1}{x}$ έχει μία μόνο ρίζα στο (0 , 1)

v. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^{-x} = x + \alpha$, $0 < \alpha < 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο R.

vi. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^{-x} = x + \alpha$, $\alpha \in R$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο R.

vii. Δείξτε ότι η εξίσωση $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 3x - 2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο R.

viii. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x = \frac{1}{6}x^3 + \lambda x + \mu$, $\lambda, \mu \in R$ έχει το πολύ δύο διακεκριμένες ρίζες στο R.

ix. Δείξτε ότι η εξίσωση $(x+1)^2 = 2x\ln x$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

x. Δείξτε ότι η εξίσωση $2x^3 + 9x^2 - 12 = 6x^2\ln x$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

18. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο R , αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει τρείς ρίζες στο R.

19. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f και έστω ρ μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Αποδείξτε ότι :

i. Αν το ρ είναι ρίζα πολλαπλότητας 1 , τότε το ρ δεν είναι ρίζα της $f'(x) = 0$.

ii. Αν το ρ είναι ρίζα πολλαπλότητας ν > 1 , τότε το ρ είναι ρίζα της $f'(x) = 0$ πολλαπλότητας ν – 1.

20. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα στο διάστημα (1 , 3).

Ποιος είναι ο βαθμός πολλαπλότητας της ρίζας αυτής;

Πόσες άλλες ρίζες έχει η εξίσωση αυτή στο R;

21. Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με $0 < \alpha < \beta$, $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

i. Δείξτε ότι η εξίσωση $x \cdot f'(x) - f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα $x_o \in (\alpha, \beta)$

ii. Δείξτε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_o, f(x_o))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

22. Μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to R$ είναι συνεχής στο [α , β], παραγωγίσιμη στο (α , β) και ισχύει: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να δείξτε ότι:

i. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$ όπου g η συνάρτηση

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}\cdot\ c\notin\ [\alpha,\beta]$

ii. Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $A(c,0)$. (ΘΕΜΑ)

23. Δίνεται συνάρτηση f , δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0\ ,\ 1]$ με $f(0)=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x\cdot f'(0)-(f(1)-f'(0))\cdot x^2$

i. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\rho\in(0,\ 1)$, τέτοιο ώστε $g'(\rho)=0$.

ii. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε: $f(1)-f'(0)=\dfrac{1}{2}f''(\xi)$.

24. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), με $f(\alpha) = 3\beta$ και $f(\beta) = 3\alpha$. Αποδείξτε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x-3y+5=0$.

25. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με
$f(1) = \alpha + \beta$, $f(2) = 2\alpha + \beta$, $f(3) = 3\alpha + \beta$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε $f''(\xi)=0$.

26. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 7]$ με $f(1) + f(7) = 2f(4)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,\ 7)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

27. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-\alpha, \alpha]$ για την οποία ισχύει $f(-\alpha) + f(\alpha) = 2f(0)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(-\alpha, \alpha)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

28. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$ για την οποία ισχύει $f(0)=\dfrac{f(-1)+f(1)}{2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,\ 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

29. Μια συνάρτηση $f:[\alpha,\ \beta]\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha , \beta]$ και ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha , \beta)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί ξ , ξ_1 , ξ_2 με $\xi\in(\alpha , \beta)$ και $\alpha<\xi_1<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\xi_2<\beta$ ώστε να ισχύει $2f'(\xi)=f'(\xi_1)+f'(\xi_2)$.

30. Μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha , \beta]$ και ισχύει $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha , \beta)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

31. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] για την οποία ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και για κάποιο $\gamma \in (\alpha, \beta)$ είναι $f(\gamma) < 0$. Αποδείξτε ότι :

1. Υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o) = 0$.

2. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) > 0$.

32. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [0, 1] με $f(0)=0$ και $f(1) =1$. Αποδείξτε ότι :

1. Υπάρχει $x_o \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = 1 - x_o$.

2. Υπάρχουν $x_1 \in (0, x_o)$ και $x_2 \in (x_o, 1)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)f'(x_2) = 1$.

33. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0, \lambda] \to R$ τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $f(\lambda) = \lambda$.

1. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \lambda)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \lambda - \xi$.

2. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \lambda)$, δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \lambda)$ με $0 < \xi_1 < \xi < \xi_2 < \lambda$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

34. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

1. $1 - \dfrac{\alpha}{\beta} < \ln\dfrac{\beta}{\alpha} < \dfrac{\beta}{\alpha} - 1 \quad , \quad 0 < \alpha < \beta$

2. $\dfrac{1}{\alpha + 1} < \ln(\alpha + 1) - \ln\alpha < \dfrac{1}{\alpha} \quad , \quad \alpha > 0$

3. $\varepsilon\varphi\alpha < \dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha) - \ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta - a} < \varepsilon\varphi\beta, \quad 0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

4. $\dfrac{\beta - \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} < \varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\alpha < \dfrac{\beta - \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} \quad , \quad 0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

35. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] για την οποία ισχύουν $f'(\alpha) > 0$, $f'(\beta) > 0$ και $(f(\beta) - f(\alpha))(\beta - \alpha) < 0$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α,β).

36. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [0, 2] , παραγωγίσιμη στο (0, 2) για την οποία ισχύουν $f(0) = 3$, $f(2) = 1$.

1. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f(x_o)}{3} = x_o$.

2. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) - f'(\xi_2) = \dfrac{8x_o - 6}{(2 - x_o)x_o}$.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ.

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f

- είναι συνεχής σ' ένα **διάστημα** Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$

τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

Πόρισμα

Αν δύο συναρτήσεις f , g

- είναι συνεχείς σ' ένα **διάστημα** Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$

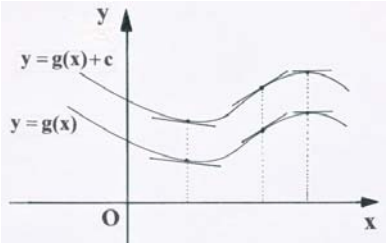
τότε υπάρχει σταθερός αριθμός c τέτοιος, ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Παρατηρήσεις

1. Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που έχουν την ίδια παράγωγο. Για όλες αυτές τις συναρτήσεις ισχύουν τα εξής:

α. Διαφέρουν μεταξύ τους κατά μια σταθερά c.

β. Στα σημεία με την ίδια τετμημένη $x_0 \in \Delta$ οι εφαπτόμενες των γραφικών τους παραστάσεων είναι παράλληλες.

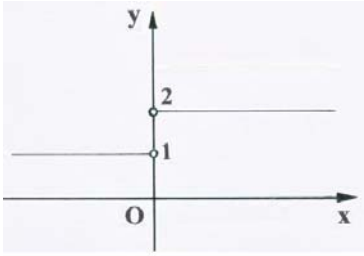


γ. Έχουν τους ίδιους ρυθμούς μεταβολής.

2. Το θεώρημα και το πόρισμα ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

π.χ. για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ x < 0 \\ 2 & , \ x > 0 \end{cases}$

ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in R^*$, παρόλα αυτά



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Α΄ ΟΜΑΔΑ: ***(Σταθερή συνάρτηση – Εύρεση τύπου)***

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι **σταθερή** σ' ένα διάστημα Δ και στη συνέχεια να βρούμε **τον τύπο** της ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

- Αποδεικνύουμε ότι

  η f είναι συνεχής στο Δ και

  $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$.

- Συμπεραίνουμε ότι η f είναι σταθερή στο Δ, δηλαδή $f(x) = c$ για κάθε $x \in \Delta$.
- Υπολογίζουμε τη σταθερά c και στη συνέχεια βρίσκουμε τον τύπο της f.

Παράδειγμα 1

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $g, h:R \to R$ με $h'(x) = -g^{2007}(x)$ και $g'(x) = h^{2007}(x)$ για κάθε $x \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = g^{2008}(x) + h^{2008}(x)$ είναι σταθερή στο R.

β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, αν είναι $g(1) = 0$ και $h(1) = 1$.

Λύση

α. Οι συναρτήσεις g, h είναι παραγωγίσιμες στο R, άρα καθεμιά από τις συναρτήσεις g^{2008}, h^{2008} είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο παραγωγισίμων, οπότε και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, ως άθροισμα παραγωγισίμων με

$$f'(x)=\left(g^{2008}(x)+h^{2008}(x)\right)'=2008\,g^{2007}(x)\,g'(x)+2008\,h^{2007}(x)\,h'(x)=$$

$$= 2008\,g^{2007}(x)\,h^{2007}(x) + 2008\,h^{2007}(x)\left(-g^{2007}(x)\right) =$$

$$= 2008\,g^{2007}(x)\,h^{2007}(x) - 2008\,h^{2007}(x)\,g^{2007}(x) = 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι σταθερή στο R.

β. Για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) = c \Leftrightarrow g^{2008}(x) + h^{2008}(x) = c$, οπότε για $x=1$ έχουμε:

$g^{2008}(1) + h^{2008}(1) = c \Leftrightarrow 0 + 1 = c \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f(x) = 1$, $x \in R$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu^6 x + 2\sigma\upsilon\nu^6 x - 3\eta\mu^4 x - 3\sigma\upsilon\nu^4 x$, $x \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο R.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση

α. Για κάθε $x \in R$ είναι

$$f'(x) = \left(2\eta\mu^6 x + 2\sigma\upsilon\nu^6 x - 3\eta\mu^4 x - 3\sigma\upsilon\nu^4 x\right)' =$$

$$12\eta\mu^5 x\,\sigma\upsilon\nu x - 12\sigma\upsilon\nu^5 x\,\eta\mu x - 12\eta\mu^3 x\,\sigma\upsilon\nu x + 12\sigma\upsilon\nu^3 x\,\eta\mu x =$$

$$12\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x\right) - 12\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x\right) =$$

$$-6\eta\mu 2x\left(\sigma\upsilon\nu^4 x - \eta\mu^4 x\right) + 6\eta\mu 2x\left(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x\right) =$$

$$-6\eta\mu 2x\left(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x\right)\left(\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x\right) + 6\eta\mu 2x\left(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x\right) =$$

$$-6\eta\mu 2x\,\sigma\upsilon\nu 2x + 6\eta\mu 2x\,\sigma\upsilon\nu 2x = 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι σταθερή στο R.

β. Για κάθε $x \in R$ είναι

$f(x)=c \Leftrightarrow 2\eta\mu^6 x+2\sigma\upsilon\nu^6 x-3\eta\mu^4 x-3\sigma\upsilon\nu^4 x=c$, οπότε για $x=0$ έχουμε:

$2\eta\mu^6 0+2\sigma\upsilon\nu^6 0-3\eta\mu^4 0-3\sigma\upsilon\nu^4 0=c \Leftrightarrow c=-1$, άρα $f(x)=-1$, $x\in R$.

Παράδειγμα 3

Έστω μια συνάρτηση f η οποία για κάθε $x, y\in R$ ικανοποιεί τη σχέση

$f(x)-f(y)\le (x-y)^2$ (1). Να αποδείξετε ότι :

α. $|f(x)-f(y)|\le (x-y)^2$ για κάθε $x, y\in R$.

β. Η συνάρτηση f είναι σταθερή στο R.

Λύση

α. Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x, y\in R$, άρα θα ισχύει και για $y, x\in R$, οπότε είναι

$f(y)-f(x)\le (y-x)^2 \Leftrightarrow -f(x)+f(y)\le (x-y)^2 \Leftrightarrow -(x-y)^2\le f(x)-f(y)$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε

$-(x-y)^2\le f(x)-f(y)\le (x-y)^2 \Leftrightarrow |f(x)-f(y)|\le (x-y)^2$ για κάθε $x, y\in R$.

β. Για $x, x_o\in R$ με $x\ne x_o$ έχουμε

$$|f(x)-f(x_o)|\le (x-x_o)^2 \Leftrightarrow |f(x)-f(x_o)|\le |x-x_o|^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|f(x)-f(x_o)|}{|x-x_o|}\le |x-x_o| \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right|\le |x-x_o| \Leftrightarrow$$

$$-|x-x_o|\le \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\le |x-x_o|$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_o}\left(-|x-x_o|\right)=\lim\limits_{x\to x_o}|x-x_o|=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

ότι και $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=0 \Leftrightarrow f'(x_o)=0$. Είναι $f'(x_o)=0$ για κάθε $x_o\in R$,

επομένως η f είναι σταθερή στο R.

Β΄ ΟΜΑΔΑ : ***(Απόδειξη ταυτοτήτων)***

Περιλαμβάνει ασκήσεις που αφορούν την **απόδειξη ταυτοτήτων**. Στις ασκήσεις αυτές συνήθως ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ταυτότητας σ' ένα μέλος, συνήθως στο πρώτο, αν δε βρίσκονται ήδη στο μέλος αυτό.
- Θεωρούμε συνάρτηση f με τύπο ίσο με το πρώτο μέλος της ταυτότητας.
- Δείχνουμε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή με τιμή 0.

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι $\text{συν}2x = 1 - 2\,\text{ημ}^2 x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \text{συν}2x + 2\,\text{ημ}^2 x - 1$, $x \in R$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$f'(x) = -\text{ημ}\,2x \cdot (2x)' + 2 \cdot 2\text{ημ}\,x \cdot (\text{ημ}x)' =$

$-2\,\text{ημ}\,2x + 2 \cdot 2\text{ημ}\,x\,\text{συν}x = -2\,\text{ημ}\,2x + 2\,\text{ημ}\,2x = 0.$

Παρατηρούμε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in R$, άρα η f είναι σταθερή στο R, οπότε

$f(x) = c$ για κάθε $x \in R$.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = c \Leftrightarrow \text{συν}0 + 2\,\text{ημ}^2 0 - 1 = c \Leftrightarrow c = 0$,

οπότε για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \text{συν}2x + 2\,\text{ημ}^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{συν}2x = 1 - 2\,\text{ημ}^2 x.$

Παράδειγμα 2

Να αποδείξετε ότι $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$f(x) = \ln(xy) - \ln x - \ln y,\ \ x, y \in (0, +\infty).$

Παραγωγίζουμε ως προς x θεωρώντας το y ως σταθερά.

Για $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\ln(xy) - \ln x - \ln y\right)' = \frac{1}{xy}(xy)' - \frac{1}{x} - 0 = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

Παρατηρούμε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα

η f είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$,

οπότε

$f(x) = c,\ \ x, y \in (0, +\infty).$

Για $x = y = 1$ είναι $f(1) = c \Leftrightarrow \ln 1 - \ln 1 - \ln 1 = c \Leftrightarrow c = 0$,

άρα για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$,

έχουμε

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(xy) - \ln x - \ln y = 0 \Leftrightarrow \ln(xy) = \ln x + \ln y.$

Γ΄ ΟΜΑΔΑ : ***(Συναρτήσεις με ίσες παραγώγους)***

Περιλαμβάνει ασκήσεις στις οποίες δίνεται μια σχέση στην οποία εμφανίζονται ενδεχομένως οι συναρτήσεις f, f', f'' και κάποιες άλλες παραστάσεις που περιέχουν τη μεταβλητή x.

Στις ασκήσεις αυτές συνήθως ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

- Αξιοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου ή σύνθετης συνάρτησης καταλήγουμε τελικά σε μια σχέση της μορφής

$$[f(x)]'=[g(x)]' \ , \quad x \in \Delta$$

- Αν το Δ είναι **διάστημα**, τότε

$$f(x) = g(x) + c \ , \quad x \in \Delta$$

Αν $\Delta = \Delta_1 U \Delta_2$, δηλαδή το Δ είναι **ένωση διαστημάτων**, τότε

$$f(x)=\begin{cases} g(x) + c_1 \ , & \text{αν } x \in \Delta_1 \\ g(x) + c_2 \ , & \text{αν } x \in \Delta_2 \end{cases}$$

- Υπολογίζουμε τη σταθερά c ή τις σταθερές c_1, c_2 και στη συνέχεια βρίσκουμε τον τύπο της f.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ τέτοια, ώστε $f'(x) = \frac{1}{x} + x - 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $f(1) = 4$.

Λύση

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \left(\ln x + \frac{x^2}{2} - x\right)', \text{ οπότε } f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2} - x + c.$$

Είναι $f(1) = 4 \Leftrightarrow \ln 1 + \frac{1}{2} - 1 + c = 4 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + c = 4 \Leftrightarrow c = \frac{9}{2}$.

Άρα $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{9}{2}$, $x \in (0, +\infty)$.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοια, ώστε $f'(x) = \frac{2}{1 + \text{συν}2x}$

για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0) = 1$.

Λύση

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$f'(x) = \frac{2}{1+\sigma\upsilon\nu 2x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2}{1+2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Leftrightarrow f'(x) = (\varepsilon\varphi x)', \quad \text{οπότε } f(x) = \varepsilon\varphi x + c.$$

Είναι $f(0) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 0 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $f(x) = \varepsilon\varphi x + 1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Παράδειγμα 3

Να βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο R τέτοια, ώστε $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = -2$.

Λύση

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' \Leftrightarrow f'(x) = \left[\ln(x^2+1)\right]', \text{ οπότε}$$

$$f(x) = \ln(x^2+1) + c.$$

Είναι $f(0) = -2 \Leftrightarrow \ln 1 + c = -2 \Leftrightarrow c = -2$. Άρα $f(x) = \ln(x^2+1) - 2$, $x \in R$.

Παράδειγμα 4

Να βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο $R - \{1\}$ τέτοια, ώστε $(x-1)f'(x) = 2x^2 + x - 3$ για κάθε $x \in R - \{1\}$, $f(0) = 1$ και $f(2) = 13$.

Λύση

Για κάθε $x \in R - \{1\}$ είναι

$$(x-1)f'(x) = 2x^2 + x - 3 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 2x + 3 \Leftrightarrow f'(x) = (x^2 + 3x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (x^2 + 3x)' \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + c_1, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 + 3x + c_2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Είναι :

$f(0)=1 \Leftrightarrow 0^2+3\cdot 0+c_1=1 \Leftrightarrow c_1=1$ και

$f(2)=13 \Leftrightarrow 2^2+3\cdot 2+c_2=13 \Leftrightarrow c_2=3$,

οπότε $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+1 \ , & \text{αν } x<1 \\ x^2+3x+3 \ , & \text{αν } x>1 \end{cases}$

Παράδειγμα 5 :

Να βρείτε συνεχή συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις $(x-1)f'(x)=2x^2+x-3$ για κάθε $x\in R-\{1\}$ και $f(1)=4$.

Λύση

Για κάθε $x\in R-\{1\}$ είναι

$$(x-1)f'(x)=2x^2+x-3 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x^2+x-3}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=2x+3 \Leftrightarrow f'(x)=\left(x^2+3x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\left(x^2+3x\right)' \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+3x+c_1 \ , & \text{αν } x<1 \\ x^2+3x+c_2 \ , & \text{αν } x>1 \end{cases}$$

Επειδή $f(1)=4$ έχουμε $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+c_1 \ , & \text{αν } x<1 \\ 4 \ , & \text{αν } x=1 \\ x^2+3x+c_2 \ , & \text{αν } x>1 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $x_o=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+3x+c_1\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+3x+c_2\right)=4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+3\cdot 1+c_1=4 \\ 1^2+3\cdot 1+c_2=4 \end{cases} \Leftrightarrow c_1=c_2=0$$

Άρα $f(x)=\begin{cases} x^2+3x \ , & \text{αν } x<1 \\ 4 \ , & \text{αν } x=1 \\ x^2+3x \ , & \text{αν } x>1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=x^2+3x \ , \ x\in R.$

Παράδειγμα 6

Να βρείτε συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις $f'(2x-1)=1+3x$ για κάθε $x\in R$ και $f(1)=3$.

Λύση

<u>1ος τρόπος</u>

Για κάθε $x\in R$ είναι

$$f'(2x-1)=1+3x \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2f'(2x-1)=2+6x \Leftrightarrow f'(2x-1)\cdot(2x-1)'=6x+2 \Leftrightarrow$$

$\left[f(2x-1)\right]' = \left(3x^2+2x\right)'$, οπότε $f(2x-1) = 3x^2+2x+c$,

Για $x=1$ είναι $f(1) = 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + c \Leftrightarrow 3 = 5 + c \Leftrightarrow c = -2$.

Άρα $f(2x-1) = 3x^2+2x-2$.

Θέτουμε $2x-1 = t \Leftrightarrow x = \frac{t+1}{2}$, οπότε έχουμε $f(t) = 3\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{t+1}{2} - 2 \Leftrightarrow$

$f(t) = \frac{3}{4}t^2 + \frac{5}{2}t - \frac{1}{4}$. Άρα $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}$, $x \in R$.

2ος τρόπος

Για κάθε $x \in R$ είναι $f'(2x-1) = 1 + 3x$.

Θέτουμε $2x-1 = t \Leftrightarrow x = \frac{t+1}{2}$, οπότε έχουμε

$f'(t) = 1 + 3\frac{t+1}{2} \Leftrightarrow f'(t) = \frac{3}{2}t + \frac{5}{2} \Leftrightarrow f'(t) = \left(\frac{3}{4}t^2 + \frac{5}{2}t\right)'$, άρα

$f(t) = \frac{3}{4}t^2 + \frac{5}{2}t + c$.

Είναι $f(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\cdot 1^2 + \frac{5}{2}\cdot 1 + c = 3 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{4}$. Άρα

$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}$, $x \in R$.

Παράδειγμα 7 :

Να βρείτε συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις $f'(x^3) = 5x^2$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $f(8) = 97$.

Λύση

1ος τρόπος

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$f'(x^3) = 5x^2 \overset{\cdot 3x^2 \neq 0}{\Leftrightarrow} 3x^2 f'(x^3) = 15x^4 \Leftrightarrow f'(x^3)\cdot(x^3)' = (3x^5)' \Leftrightarrow \left(f(x^3)\right)' = \left(3x^5\right)'$,

οπότε $f(x^3) = 3x^5 + c$,

Για $x = 2$ έχουμε $f(8) = 3\cdot 2^5 + c \Leftrightarrow 97 = 96 + c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $f(x^3) = 3x^5 + 1$.

Θέτουμε $x^3 = t \underset{t>0}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} x = \sqrt[3]{t}$, οπότε έχουμε $f(t) = 3\left(\sqrt[3]{t}\right)^5 + 1 \Leftrightarrow f(t) = 3t\sqrt[3]{t^2} + 1$

Άρα $f(x) = 3x\sqrt[3]{x^2} + 1$, $x \in (0, +\infty)$.

2ος τρόπος

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x^3) = 5x^2$.

Θέτουμε $x^3 = t \underset{t>0}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} x = \sqrt[3]{t}$, οπότε έχουμε $f'(t) = 5\sqrt[3]{t^2} \Leftrightarrow f'(t) = 5t^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$

$$f'(t) = \left(5\frac{t^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right)' \Leftrightarrow f'(t) = \left(5\frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right)' \Leftrightarrow f'(t) = \left(3t^{\frac{5}{3}}\right)'.$$

Άρα $f(t) = 3t^{\frac{5}{3}} + c \Leftrightarrow f(t) = 3t \cdot t^{\frac{2}{3}} + c \Leftrightarrow f(t) = 3t\sqrt[3]{t^2} + c$.

Είναι $f(8) = 97 \Leftrightarrow 3 \cdot 8\sqrt[3]{8^2} + c = 97 \Leftrightarrow 96 + c = 97 \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα $f(x) = 3x\sqrt[3]{x^2} + 1$, $x \in (0, +\infty)$.

Δ΄ ΟΜΑΔΑ : ***(Συναρτήσεις με ίσες παραγώγους – Ειδικές περιπτώσεις)***

Περιλαμβάνει ασκήσεις στις οποίες θέλουμε να βρούμε τον τύπο μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ από μια σχέση της μορφής:

1. $f'(x) + \alpha(x) \cdot f(x) = \beta(x)$, $x \in \Delta$

Στις ασκήσεις αυτές ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της **(1)** με $e^{A(x)}$, όπου $A(x)$ είναι μια παράγουσα της $\alpha(x)$ στο διάστημα Δ και έχουμε:

$$f'(x)e^{A(x)} + e^{A(x)}\alpha(x)f(x) = e^{A(x)}\beta(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{A(x)} + e^{A(x)}\left(A(x)\right)'f(x) = e^{A(x)}\beta(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{A(x)} + \left(e^{A(x)}\right)'f(x) = e^{A(x)}\beta(x) \Leftrightarrow \left(f(x)e^{A(x)}\right)' = e^{A(x)}\beta(x) \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)e^{A(x)}\right)' = \left(g(x)\right)' \Leftrightarrow f(x)e^{A(x)} = g(x) + c \Leftrightarrow f(x) = g(x)e^{-A(x)} + ce^{-A(x)}, \ x \in \Delta,$$

όπου $g(x)$ μια παράγουσα της $e^{A(x)}\beta(x)$ στο Δ .

2. $f(x) = \lambda g(x)$, $x \in \Delta$

Στις ασκήσεις αυτές ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

- $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x \in \Delta$ και αποδεικνύουμε ότι είναι σταθερή με τιμή λ .

ή

- $G(x) = f(x) - \lambda g(x)$, $x \in \Delta$ και αποδεικνύουμε ότι είναι σταθερή με τιμή 0.

Παράδειγμα 8 ***(Βασική Άσκηση)***

Να αποδείξετε ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο R έχει την ιδιότητα $f' = f$ αν και μόνο αν $f(x) = ce^x$, $x \in R$, όπου c πραγματική σταθερά.

Λύση

1ος τρόπος

Για κάθε $x \in R$ είναι

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0 \overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)e^{-x} - e^{-x}f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} + \left(e^{-x}\right)'f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)e^{-x}\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = c \Leftrightarrow f(x) = ce^x.$$

2ος τρόπος

- Έστω ότι $f' = f$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$, $x \in R$.

  Για κάθε $x \in R$ είναι

$$F'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' \Leftrightarrow F'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{\left(e^x\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$F'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} \Leftrightarrow F'(x) = 0$$

$$\text{Άρα } F(x) = c \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} = c \Leftrightarrow f(x) = ce^x,\ x \in R.$$

- Έστω ότι $f(x) = ce^x$, τότε $f'(x) = \left(ce^x\right)' \Leftrightarrow f'(x) = ce^x \Leftrightarrow f'(x) = f(x)$, $x \in R$

  Άρα $f' = f$.

Παράδειγμα 9

Να βρείτε συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις $f'(x) = -2xf(x)$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 2$.

Λύση

Για κάθε $x \in R$ είναι

$$f'(x) = -2xf(x) \Leftrightarrow f'(x) + 2xf(x) = 0 \overset{\cdot e^{x^2}}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)e^{x^2} + 2xe^{x^2}f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{x^2} + e^{x^2}\left(x^2\right)'f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{x^2} + \left(e^{x^2}\right)'f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(f(x)e^{x^2}\right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$f(x)e^{x^2} = c \Leftrightarrow f(x) = ce^{-x^2}$.

Είναι $f(0) = 2 \Leftrightarrow ce^{o} = 2 \Leftrightarrow c = 2$, οπότε $f(x) = 2e^{-x^2}$, $x \in R$.

Παράδειγμα 10

Να βρείτε συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$, $f'(0) = 2$ και $f(0) = 0$.

Λύση

Για κάθε $x \in R$ είναι

$$f''(x) = f(x) \overset{+f'(x)}{\Leftrightarrow} f''(x) + f'(x) = f'(x) + f(x) \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x) + f(x)\right)' = f'(x) + f(x) \Leftrightarrow g'(x) = g(x), \text{ όπου}$$

$$g(x) = f'(x) + f(x), \quad x \in R.$$

Για κάθε $x \in R$ είναι

$$g'(x) = g(x) \Leftrightarrow g'(x) - g(x) = 0 \overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}$$
$$g'(x)e^{-x} - e^{-x}g(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x)e^{-x} + \left(e^{-x}\right)'g(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(g(x)e^{-x}\right)' = 0 \Leftrightarrow g(x)e^{-x} = c \Leftrightarrow$$

$$g(x) = ce^{x} \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = ce^{x}.$$

Για $x = 0$ έχουμε

$$f'(0) + f(0) = ce^{o} \Leftrightarrow c = 2,$$

οπότε $f'(x) + f(x) = 2e^{x}$, $x \in R$.

Για κάθε $x \in R$ είναι

$$f'(x) + f(x) = 2e^{x} \overset{\cdot e^{x}}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)e^{x} + f(x)e^{x} = 2e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{x} + f(x)\left(e^{x}\right)' = \left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)e^{x}\right)' = \left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow f(x)e^{x} = e^{2x} + c$$

Για $x = 0$ έχουμε $f(0)e^{o} = e^{o} + c \Leftrightarrow c = -1$,

οπότε

$$f(x)e^{x} = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{x}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = e^{x} - e^{-x}, \quad x \in R.$$

Ασκήσεις για λύση

37. Μία συνάρτηση $f: R \to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in R$, και $f(0) = f'(0) = 0$. Αποδείξτε ότι:

1. Η συνάρτηση $h(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$ είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

38. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο R. Υποθέτουμε ότι ισχύει $f(x)g'(x) - f(x)g(x) = f'(x)g(x)$, $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$ και $\frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1}{e}$. Αποδείξτε ότι :

1. Η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} e^x$ είναι σταθερή, και μάλιστα ισχύει $h(x) = 1$, $x \in R$

2. Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

39. Μία συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$ είναι παραγωγίσιμη στο D_f και ισχύει $f'(e^x) = ημx + συνx$ για κάθε $x \in R$. Έστω ότι είναι f(1)=1.

1. Αποδείξτε ότι $f(e^x) = e^x ημx + 1$.

2. Να βρεθεί ο τύπος της f.

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της M (1, f(1)). (απ. (3) y = x)

40. Μία συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$ είναι παραγωγίσιμη στο D_f και ισχύει $e^{2x} f'(e^x) = συνx - ημx$ για κάθε $x \in R$. Έστω ότι είναι f(1) = 2006.

1. Αποδείξτε ότι $f(e^x) = \frac{ημx}{e^x} + 2006$.

2. Να υπολογίσετε το f(π).

41. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Η f παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x)συνx + f(x)ημx = f(x)συνx$ και f(0)=1992. (ΘΕΜΑ 1992)

2. Η f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) - f(x) = e^x(συνx - ημx)$ για κάθε $x \in R$ και f(0) = 1.

3. Η f παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,π) με $f'(x)ημx - f(x)συνx = f(x)ημx$, $f(x) \neq 0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

4. Η f παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με $xf'(x) - f(x) = 1998x$ και f(1)=1998. (ΘΕΜΑ 1998)

5. Η f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \in R$ και f(0) = 0.

6. Η f παραγωγίσιμη στο R με $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in R$ και f(0) = 0 (ΘΕΜΑ 2005)

Απαντήσεις - Υποδείξεις στις Ασκήσεις για λύση:

2. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα [0, 1].

4. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - kx$ στο διάστημα [0, 1].

6. Έστω $f(\alpha) = f(\beta)$ και με το θ.Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.

7. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = xf(x)$ στο διάστημα [0, 1].

8. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = f(x)g(x)$ στο διάστημα [α, β].

9. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x^2$ στο διάστημα [α, β].

10. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - \ln(f(x))$ στο διάστημα [α, β].

11. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ στο διάστημα [α, β].

12. Έστω ότι έχει δύο ρίζες και με το θ.Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.

13. i. Ισχύει $\begin{array}{l} \alpha + \ln f(\alpha) = \beta + \ln f(\beta) \Leftrightarrow \ln e^{\alpha} + \ln f(\alpha) = \ln e^{\beta} + \ln f(\beta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln\left(e^{\alpha} f(\alpha)\right) = \ln\left(e^{\beta} f(\beta)\right) \Leftrightarrow e^{\alpha} f(\alpha) = e^{\beta} f(\beta) \end{array}$ κ.λ.π.

ii. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου Β.

iii. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της g κ.λ.π.

14. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = f(x)f(1 - x)$ στο διάστημα [0, 1].

15. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση h στο διάστημα [0, ρ].

16. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = f(x)f'(x)$ στο διάστημα [α, β].

18. Έστω ότι έχει τρεις ρίζες …καταλήγουμε σε άτοπο εφαρμόζοντας το θ.Rolle στα δύο διαστήματα που ορίζουν οι τρεις αυτές ρίζες.

19. i. Είναι $f(x) = (x - \rho)\pi(x)$, άρα αν παραγωγίσουμε βρίσκουμε $f'(x) = \pi(x) + (x - \rho)\pi'(x)$. Αν το ρ είναι ρίζα της παραγώγου θα ισχύει $f'(\rho) = \pi(\rho) + (\rho - \rho)\pi'(\rho) = 0 \Rightarrow \pi(\rho) = 0$, άτοπον…κ.λ.π.

ii. Είναι $f(x) = (x - \rho)^{\nu}\pi(x)$ παραγωγίζουμε κ.λ.π.

20. Εφαρμόζουμε θ.Bolzano για την ύπαρξη της ρίζας. Την μοναδικότητα μπορούμε να την αποδείξουμε με την μονοτονία ή με το θ.Rolle και απαγωγή σε άτοπο. Για την πολλαπλότητα της ρίζας υποθέτουμε ότι είναι πολλαπλότητας 2, άρα θα ήταν ρίζα και της παραγώγου …άτοπον. Τέλος εφαρμόζοντας θ.Bolzano στα διαστήματα (0,1), (1,3), (3,4) βρίσκουμε ότι η εξίσωση έχει τρεις ρίζες.

21. i. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ στο διάστημα [α, β]. Έστω ότι έχει και δεύτερη ρίζα …καταλήγουμε σε άτοπο εφαρμόζοντας το θ.Rolle.

ii. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου Ο(0,0).

22. i. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση g στο διάστημα [α, β].

ii. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου Α.

23. i. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση g στο διάστημα [0,1].

ii. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση g' στο διάστημα (0, ρ).

24. Πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει ξ στο διάστημα (α, β) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -3$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. κ.λ.π.

25. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [1, 2] και [2, 3] και στη συνέχεια θ.Rolle κ.λ.π.

26. , 27. , 28. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. και στη συνέχεια θ.Rolle .

29. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$, $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$. Προσθέτουμε κατά μέλη και προκύπτει πάλι το Θ.Μ.Τ.

30. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$, $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ και στη συνέχεια θ.Rolle .

31. 1. Εφαρμόζουμε θ.Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα [α, β].

2. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στα διαστήματα [α, γ] , [γ, β] και στη συνέχεια πάλι Θ.Μ.Τ. για την f'.

32. 1. Εφαρμόζουμε θ.Bolzano στο διάστημα [0, 1] για τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x - 1$.

2. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ.

33. Εργαζόμαστε όπως και στην άσκηση 32.

34. Εργαζόμαστε με το Θ.Μ.Τ. θεωρόντας κατάλληλη συνάρτηση.

35. Από την υπόθεση προκύπτει $f'(\xi) < 0$, όπου ξ ανήκει στο διάστημα [α, β]. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε θ.Bolzano στα διαστήματα [α, ξ] , [ξ, β] για την f' και μετά θ.Rolle .

36. Εργαζόμαστε όπως και στην άσκηση 32.

37. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $h'(x) = 0$ για κάθε $x \in R$.

38. 1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $h'(x) = 0$ για κάθε $x \in R$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το 1 κ.λ.π.

2. Έστω ότι η f δεν διατηρεί πρόσημο στο R.Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$, τέτοια ώστε $f(x_1)f(x_2) < 0$. Άρα από το θ.Bolzano στο διάστημα $[x_1, x_2]$ θα υπάρχει $x_o \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = 0$. Αντικαθιστούμε στη σχέση $\frac{f(x)}{g(x)}e^x = 1$ το x με το x_o καταλήγουμε σε άτοπον. Άρα η f διατηρεί πρόσημο.

39. Πολλαπλασιάζουμε τη δοθείσα με e^x και προκύπτει $\left(f(e^x)\right)' = \left(e^x \eta\mu x\right)'$ κ.λ.π.

40. 1. Η δοθείσα γράφεται $e^x f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x}$ άρα $\left(f(e^x)\right)' = \left(\frac{\eta\mu x}{e^x}\right)'$ κ.λ.π.

2. Θέτουμε όπου x το lnπ κ.λ.π.

41. 1. $f(x) = 1992e^x \sigma\upsilon\nu x$, **2.** $f(x) = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$, **3.** $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} e^x \eta\mu x$,

4. $f(x) = 1998x(1 + \ln x)$, **5.** $f(x) = \ln(1 + x^2)$, **6.** $f(x) = \ln(\frac{1+e^x}{2})$

Γ. ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης

- **ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΦ. 2ο**

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- ***ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ***
- ***ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ***
- ***ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ***
- ***ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL***

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

42. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις.

1. $f(x) = x^3 - 6x + 3$ **2.** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ **3.** $f(x) = |x^2 - 5x| + x$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x \le 1 \\ \ln x & , x > 1 \end{cases}$ **5.** $f(x) = \dfrac{e^{\alpha x}}{x^2 + \alpha^2}$, $\alpha > 1$

ΣΧΟΛΙΟ

*Στα σημεία αλλαγής τύπου όταν μελετάμε την **μονοτονία** ή τα **ακρότατα** μιας συνάρτησης μας ενδιαφέρει η **συνέχεια** και όχι η **παραγωγισιμότητα** της συνάρτησης.*

43. 1. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού α ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 2\alpha x - 1$ να είναι γνησίως αύξουσα στο R.

2. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού α ώστε η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1) + \alpha x - 1$ να είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

3. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού α ώστε η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + \alpha x^2 - 2x + 5$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

4. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού α ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x - \ln(x^2 + 1)$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

44. Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $xe^x + 1 = e^x$ **2.** $e^x + x = 1$ **3.** $x^2 + e^{x^2 - 1} = 2$

4. $\ln(x + 1) = x$ **5.** $2x^2 + x + 3\ln x = 3$ **6.** $1 - \ln x = x^2$

7. $3^x + 4^x = 5^x$ **8.** $4 - \ln(x^2 - 3) = x^2$

45. Να αποδειχθούν οι ανισότητες:

1. $x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 1$, $x \in (0, \pi/2)$ **2.** $2\sqrt{x} \ge 3 - \dfrac{1}{x}$, $x \in [1, +\infty)$

3. $\ln(1 + x^2) < x$, $x \in (0, +\infty)$ **4.** $x + 2 + (x - 2)e^x > 0$, $x > 0$

5. $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, $x > 0$ **6.** $e^x > 1 + \ln(1 + x)$, $x > 0$

7. $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{3}, \ x > 0$

46. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x \ , \ 0 < \alpha < 1$

1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία .

2. Να λυθεί η εξίσωση $\alpha^{x^2-4} - (x^2 - 4) = \alpha^{x-2} - (x - 2)$

(ΘΕΜΑ)

47. 1. Να αποδείξετε την ανισότητα $x \ln x + 1 > x, \ x > 1$.

2. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}, \ x > 1$.

3. Να λυθεί η εξίσωση $(4x - 5)\ln x^2 = (x^2 - 1)\ln(4x - 4)$.

48. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + 5x + 1$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

2. Να λυθεί στο διάστημα $(0, 2\pi)$ η εξίσωση $e^{\eta\mu x} - e^{\sigma\upsilon\nu x} = 5(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$.

49. 1. Να λυθεί η εξίσωση $(1 - x)e^x = x^2 + 1$.

2. Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x - 1$ και $g(x) = x^2 + xe^x$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

50. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - e\ln x$.

1. Να μετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

2. Να αποδείξετε ότι $\pi^e < e^\pi$.

3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

51. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g που είναι παραγωγίσιμες , με συνεχείς πρώτες παραγώγους, για τις οποίες ισχύουν : $f'(x) = g(x), \ g'(x) = -f(x), \ x \in R$

1. Αποδείξτε ότι υπάρχουν οι f'', g'' και είναι συνεχείς.

2. Αποδείξτε ότι $f''(x) + f(x) = g''(x) + g(x)$ και ότι η συνάρτηση $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή.

3. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $x_1 < x_2$ και $f(x) \neq 0, \ x \in (x_1, x_2)$, αποδείξτε ότι η $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

(ΘΕΜΑ 1996)

52. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x \ , \ x \geq 0$.

1. Να μετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

2. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) \geq \dfrac{x}{x+1}$, $x \geq 0$.

3. Να αποδείξετε ότι $(1+\alpha)^{1+\alpha} \geq e^{\alpha}$, $\alpha \geq 0$.

53. 1. Αποδείξτε ότι $e^{x} \geq 1 + \ln(x+1)$, $x \geq 0$

3. Αν $\alpha > \beta > 0$, αποδείξτε ότι $e^{\alpha} - e^{\beta} > \ln\dfrac{\alpha+1}{\beta+1}$.

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2004} + (x-10)^{2004}$, $x \in R$.

1. Να μετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

2. Να συγκρίνετε τους αριθμούς 10^{2004}, $8^{2004} + 2^{2004}$.

55. Αποδείξτε ότι :

1. $\beta^2 - \alpha^2 < \ln\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$, $\alpha > \beta > 1$

2. $\text{ημα} - \text{βημβ} < \text{συνβ} - \text{συνα}$, $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

3. $\ln\dfrac{1-\beta}{1-\alpha} < \alpha - \beta$, $\beta < \alpha < 0$

56. 1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^3 - \beta^3 = 3^{\beta} - 3^{\alpha}$, αποδείξτε ότι $\alpha = \beta$.

2. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $2(\alpha - \beta) = \text{ημβ} - \text{ημα}$, αποδείξτε ότι α=β.

57. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + e^{f(x)} + 5 = e^{x+1}$, για κάθε $x \in R$.

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

2. Να βρείτε τον τύπο της f^{-1}.

3. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1 - x^2)$, $x > 0$.

4. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) > f(5x - 6)$.

58) Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις:

1. $f(x) = e^{-2x^3 + 6x^2}$ **2.** $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$ **3.** $f(x) = e^{x} - ex$

4. $f(x) = -\ln^2 x - 2\ln x + x\ln x$ **5.** $f(x) = \sqrt{|x|}$

6. $f(x) = x^{20} - 20x + 1$, πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = 0$;

7. $f(x) = x^3 - 3x + 1$, πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = 0$;

59. 1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $x \in [2,\ 4]$, αφού μελετήσετε την μονοτονία της , να βρείτε το σύνολο τιμών της .

2. Ομοίως για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$, $x \in [-1,\ 3]$

2. Ομοίως για τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 3x + 3}$.

60. 1. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = 2^{x^2} + 1 - \dfrac{2}{2^{x^2} + 2}$

2. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = 20 + 2x\ln 4 - 2^{x+1} - 2^{4-x}$.

61. 1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α , β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1$ να δέχεται τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -2$.

2. Αφού αντικαταστήσετε τις τιμές των α, β να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία .

(ΘΕΜΑ)

62. 1. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α , β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha(\ln x + x) + 2\beta x^2 + 3x + 1$, να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων .

2. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α , β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha\ln(x-1) - \beta x^2 - 4x + 1$, να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων

ΣΧΟΛΙΟ

*Μη ξεχνάτε ότι η συνθήκη $f'(x_1) = 0$, είναι **αναγκαία** για να παρουσιάζει η συνάρτηση f τ. ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_1, του π. ορισμού της όχι όμως και **ικανή**. Άρα να μη ξεχνάμε την επαλήθευση.*

63. Για μια συνάρτηση , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R ισχύει $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$, για κάθε $x \in R$, β,γ πραγματικοί αριθμοί με την ιδιότητα $\beta^2 < 3\gamma$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα.

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα.

3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$. (ΘΕΜΑ 2001)

64. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (1+x)^x$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

3. Να αποδείξετε ότι ισχύει $(1+x)^x \geq 1$, για κάθε $x \in A_f$.

4. Να βρείτε τον θετικό πραγματικό αριθμό α για τον οποίο ισχύει $\alpha\ln(1+\alpha) = 2\ln 3$

65. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

3. Να αποδείξετε ότι ισχύει $e^{\pi} > \pi^{e}$.

4. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\beta^{\frac{1}{\beta}} \leq e^{\frac{2}{e}}$, για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$.

66. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

1. Αποδείξτε ότι η g είναι 1-1.

2. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$, έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

(ΘΕΜΑ 2002)

67. Να βρεθεί η τιμή του θετικού αριθμού α, ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^{\alpha}e^{2\alpha - x}$, $x > 0$, να είναι η ελάχιστη δυνατή.

68. 1. Αν ισχύει $\alpha^x \geq \alpha + e\ln x$, για κάθε $x > 0$, αποδείξτε ότι $\alpha = e$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, για την οποία ισχύουν $f'(x) \neq 0$ και $e^{f(x)} - 1 \geq \alpha f(x)$ για κάθε $x \in R$. Αν είναι $f(1) = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

3. Αν ισχύει $2^x + \alpha^x \geq 2$, $\alpha > 0$, $x \in R$, αποδείξτε ότι $\alpha=1/2$.

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, για την οποία ισχύει $xf(x) + 2\eta\mu^2(\frac{\pi}{4} - x) \leq e^x$ για κάθε $x \in R$. Αποδείξτε ότι $f(0) = 3$.

5. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x - \alpha + \alpha x \geq 0$, αποδείξτε ότι $\alpha = -1$.

6. Αν για κάθε $x > -1$ ισχύει $(x-1)\ln(x+1) \le 1 - \alpha x - e^x$, αποδείξτε ότι $\alpha = 0$.

69. 1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, για την οποία ισχύει $f(x) + 2 \le e^x + 2\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in R$. Αν είναι $f(0) = 1$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R_+^* \to R$, για την οποία ισχύει $x^2 f(x) + \eta\mu\frac{\pi x}{2} \ge 3$ για κάθε $x \in R_+^*$. Αν είναι $f(1) = 2$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,2)$.

3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, για την οποία ισχύει $(1 + e^{1-x})f(x) + \eta\mu\pi x \ge 6x$ για κάθε $x \in R$. Αν είναι $f(1) = 3$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,3)$.

4. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει $f(x) + \ln(x^2+1) \ge g(x) - e^x$ για κάθε $x \in R$. Αν είναι $f(0) + 1 = g(0)$, αποδείξτε ότι $f'(0) = g'(0) - 1$

70. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$. Αν η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε τρία διαφορετικά σημεία, αποδείξτε ότι $3\beta^2 > 8\alpha\gamma$.

71. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύει $[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 182$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. (ΘΕΜΑ 1999) **72.** Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ, για τις οποίες υποθέτουμε ότι ισχύουν:

i. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ.

ii. $f'' = g''$

iii. $0 \in \Delta$ και $f(0) = g(0)$.

Να αποδείξετε ότι: **α.** Για κάθε $x \in \Delta$, $f(x) - g(x) = cx$, όπου $c \in R$.

β. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες $\rho_1 < \rho_2$, η εξίσωση $g(x) = 0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

(ΘΕΜΑ 1989)

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

73. Να μελετήσετε ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις συναρτήσεις:

1. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

2. $f(x) = xe^{-x}$

3. $f(x) = x^2 - \eta\mu x$

4. $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$

5. $f(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2 + 1$

74. 1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 - 3$ να στρέφει τα κοίλα άνω για κάθε $x \in R$.

2. Ομοίως για τη συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 6x^2 + 3x + 2$.

75. 1. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - (\alpha^2 - \alpha)x^2 + \alpha x + 1 + \alpha^2$, να παρουσιάζει καμπή στο σημείο (2, f(2))

2. Να βρείτε την τιμή των πραγματικών αριθμών α, β ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$, να παρουσιάζει καμπή στο σημείο A(1, 3).

3. Να βρείτε την τιμή των πραγματικών αριθμών α, β ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha e^x - \beta x e^x - e^2$, να παρουσιάζει καμπή στο σημείο $M(2, e^2)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Οι συνθήκες $f'(x_1) = 0$ και $f''(x_2) = 0$ **είναι αναγκαίες** για την ύπαρξη τ. ακροτάτου στο x_1 και σ. καμπής στο x_2, αντιστοίχως **αλλά δεν είναι ικανές** από μόνες τους να εξασφαλίσουν την ύπαρξή τους, γι' αυτό **καταφεύγουμε στον έλεγχο** μετά την εύρεση των παραμέτρων

76. Αν η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, έχει δύο διαφορετικά σημεία καμπής, αποδείξτε ότι ισχύει $3\alpha^2 > 8\beta$.

77. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x + 2$.

1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ είναι εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των παραπάνω συναρτήσεων.

2. Να αποδείξετε ότι η C_f είναι κυρτή και η C_g κοίλη.

3. Αποδείξτε ότι $e^x > \ln x + 2$, $x > 0$.

78. Α. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνον αν ισχύει $f(x)f''(x) \geq (f'(x))^2$.

Β. Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

(ΘΕΜΑ 1992)

79. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Θεωρούμε τη συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x)f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_o, f(x_o))$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(x_o, g(x_o))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y - 2x + 5 = 0$.

(ΘΕΜΑ 1996)

80. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ, $\kappa < \lambda$ και η συνάρτηση $f(x) = (x-\kappa)^5(x-\lambda)^3$, $x \in R$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{5}{x-\kappa} + \dfrac{3}{x-\lambda}$, $x \neq \kappa, \lambda$.

β. Η συνάρτηση $g(x) = \ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ).

(ΘΕΜΑ 1995)

81. Α. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $[f'(x)]^2 - f'(x) = (x+1)e^{-x} + x$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

Β. Ομοίως αν $[f'(x)]^3 + 2f'(x) = e^x + x^3 + x + 2$, για κάθε $x \in R$.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

82. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x - \frac{1}{x}$ **2.** $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{|x-2|}$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\eta\mu x} & , \quad -\frac{\pi}{2} \le x < 0 \\ \frac{4}{\eta\mu x} & , \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

4. $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$ **5.** $f(x) = \frac{|x|}{|x| - 1}$

83. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \frac{x-3}{2x+5}$ **2.** $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - x$ **3.** $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$

4. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

84. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες (πλάγιες) όταν $x \to +\infty$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων.

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ **2.** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ **3.** $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} + \sqrt{x^2 - 1}$

85. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

1. $f(x) = \frac{|x^2 - 1| - 5x}{x+1}$ **2.** $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x+3}$

86. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(0, f(0))

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

87. 1. Αν η ευθεία $y = 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 + \beta x - 2}{x - \beta + 1}$ στο $+\infty$ να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, και β.

2. Αν η ευθεία $y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\alpha x^3 + (3-\beta)x^2 - 2}{x^2 + 1}$ στο $+\infty$, να βρείτε τούς πραγματικούς αριθμούς α, β.

3. Αν η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} - \alpha x - \beta$ στο $+\infty$, να βρείτε τούς πραγματικούς αριθμούς α, β.

88. Έστω ότι η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

α. Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - 2x\right)$

β. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mu f(x) + 4x}{x f(x) - 2x^2 + 3x} = 1$.

(ΘΕΜΑ 1994)

89. Έστω $f, g : R \to R$, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο R τέτοιες ώστε να ισχύει: $f(x) - g(x) = x - 4$, για κάθε $x \in R$.

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, καθώς $x \to +\infty$.

α. Να βρείτε τα όρια : **i.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ και **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{x \cdot f(x) - 3x^2 + 1}$

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g, καθώς $x \to +\infty$. (ΘΕΜΑ 2000)

90. Για μία συνάρτηση f ισχύει $2x + 3 \le f(x) \le \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2}$, για κάθε $x \ne 0$. Αποδείξτε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f καθώς το $x \to \pm\infty$.

Οι κανόνες De L' Hospital

Θεώρημα 1ο $\left(\text{Μορφή } \frac{0}{0}\right)$

Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0$, $x_o \in R\cup\{-\infty\ ,\ +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Θεώρημα 2ο $\left(\text{Μορφή } \frac{\infty}{\infty}\right)$

Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty$, $x_o \in R\cup\{-\infty\ ,\ +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παρατηρήσεις

1. Το 2ο θεώρημα ισχύει και για τις μορφές $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$ και $\frac{-\infty}{-\infty}$.

2. Καθένα από τα παραπάνω θεωρήματα ισχύει και για πλευρικά όρια. Επίσης μπορεί να εφαρμόζεται όσες φορές χρειάζεται για τον υπολογισμό ενός ορίου αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις του.

3. Οι κανόνες De L' Hospital εφαρμόζονται όταν:

- Το όριο $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- Οι συναρτήσεις f , g είναι ορισμένες σ' ένα σύνολο της μορφής

$(x_o-\delta,\ x_o)\cup(x_o,\ x_o+\delta)$ ή $(x_o-\delta,\ x_o)$ ή $(x_o,\ x_o+\delta)$ ή $(-\infty\ ,\ \alpha)$ ή $(\alpha\ ,\ +\infty)$

- Οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες σε περιοχή του $x_o \in R$ και όχι μόνο στο x_o, στο οποίο η ύπαρξη της παραγώγου δεν είναι απαραίτητη.
- Υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο).

4. Αν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει αυτό δε σημαίνει ότι δεν υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ απλά πρέπει να το αναζητήσουμε με άλλον τρόπο.

5. Όσο γοητευτική κι αν φαίνεται η μέθοδος De L' Hospital δεν είναι πανάκεια, γιατί άλλοτε δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του σχετικού θεωρήματος και άλλοτε δεν είναι συμφέρουσα μέθοδος.

6. Μορφές απροσδιοριστίας $0\cdot(\pm\infty)$, $+\infty-\infty$, 0^0 , $(+\infty)^0$, 1^∞ με κατάλληλους μετασχηματισμούς ανάγονται στις μορφές $\dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

(Βλέπε το παρακάτω σχόλιο.)

7. Αν εφαρμόσουμε τα θεωρήματα σε μη απροσδιόριστες μορφές, τότε προκύπτει λάθος όριο.

91. Αποδείξτε ότι:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x+1}=0$ **2.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}=\dfrac{1}{2}$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}-x}{4x^2}=+\infty$ **5.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x^2-\ln(x+1)}=-1$ **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=1$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$ **8.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$ **9.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}=2$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{\ln(x^2+1)}=+\infty$ **11.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+3)}{\ln(x+5)}=1$ **12.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(x-2)}{x^2-x-6}=\dfrac{1}{5}$

ΣΧΟΛΙΟ

Οι κανόνες De L' Hospital μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλες μορφές απροσδιοριστίας (εκτός των μορφών βλέπε σχ. βιβλίο σελ. 282-283) αρκεί να τις μετατρέπουμε όπως παρακάτω.

i. Μορφή $\boxed{\infty-\infty}$: Κάνουμε τους μετασχηματισμούς

α. $f-g=f\left(1-\dfrac{g}{f}\right)$ ή **β.** $f-g=\dfrac{1}{\frac{1}{f}}-\dfrac{1}{\frac{1}{g}}=\dfrac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot g}}$

ii. Μορφή $\boxed{0(\pm\infty)}$: Κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}} \quad \text{ή} \quad f\cdot g=\frac{g}{\frac{1}{f}}$$

iii. Μορφή $\boxed{1^{\pm\infty},\ 0^0\ ,0^\infty\ ,\infty^0}$: Χρησιμοποιούμε τον τύπο :

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)} \quad , \quad f(x)>0$$

ΑΣΚΗΣΗ: (Λύνεται με τους παραπάνω μετασχηματισμούς)

Αποδείξτε ότι:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x=0$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{συν}x)^{\frac{1}{x}}=1$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$ **4.** $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(xe^x-\ln(x+1)\right)=+\infty$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x^2+1)}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ **8.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\frac{1}{2}$

ΣΧΟΛΙΟ

Στην εφαρμογή των κανόνων De L' Hospital πρέπει να **προσέχουμε** (όπως έχουμε αναφέρει παραπάνω) οι συναρτήσεις να είναι **παραγωγίσιμες σε διάστημα** και να **υπάρχει το** $\lim\frac{f'}{g'}$ γιατί θα καταλήξουμε σε λάθος συμπέρασμα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- **Ερώτηση:** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ ένα διάστημα (α , β) τότε η f ΄ είναι συνεχής σ' αυτό. **Σ, Λ**

Ένας μαθητής δικαιολόγησε την επιλογή του ως εξής:

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο (α , β) τότε για τυχαίο $x_o\in$ (α , β) έχουμε:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\xrightarrow{DLH}\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))'}{(x-x_0)'}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-0}{1-0}=\lim_{x\to x_0}f'(x).$$

Δηλ. $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x)$. άρα η f' είναι συνεχής στο x_0.

Συμφωνείτε ή διαφωνείτε ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Εφαρμογή: $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x} \ , & x\neq 0 \\ 0 \ , & x=0 \end{cases}$

(εργαζόμενοι στη συνάρτηση αυτή βλέπουμε ότι η f' δεν είναι συνεχής στο 0).

Αποδείξτε ότι :

- $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\eta\mu x}{x-\eta\mu x}$ (Δεν μπορούμε να εργαστούμε με τον κανόνα De L' Hospital. Γιατί ;)
- Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ με $f(0)=0$ και $f'(0)=1$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2\eta\mu x}{x}$. (απ. 3)

  (Δεν μπορούμε να εργαστούμε με τον κανόνα De L' Hospital . Γιατί ;)

92. 1. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R για την οποία ισχύει $x\le f(x)\le e^{x-1}$, για κάθε $x\in R$. Αποδείξτε ότι

α. $f(1)=1$

β. $f'(1)=1$

2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και συνεχής στο $x_o=1$, για την οποία ισχύει $f(x)\cdot\ln x\ge x^2-1$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι είναι $f(1)=2$.

3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R και συνεχής στο $x_o=1$ για την οποία ισχύει $|f(x)-x+1|\le\eta\mu^2(\pi x)$,για κάθε $x\in R$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$.

Απαντήσεις – Υποδείξεις των Ασκήσεων

42. 1. Γν. αύξ. στα διαστήματα $(-\infty,-\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2},+\infty)$ και γν. φθίν. στο $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

2. Γν. φθίν.στο (0,1) και στο (1, e] ,γν. αύξ. στο [e,+∞)

3. Γν. φθίν. στα διαστήματα (- ∞, 0] , [3, 5] και γν. αύξ. στα διαστήματα [0, 3] , [5, +∞).

4. Γν. φθίν. στο διάστημα (- ∞,0] και γν. αύξ. στα διαστήματα [0,1] , [1, +∞) και επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής στο 1 μπορούμε να πούμε ότι είναι γν. αύξουσα στο [0, +∞).

5. Γνησίως αύξουσα.

43. 2. $0 \le \alpha \le 6$ **2.** $\alpha \ge 1$ **3.** $-\sqrt{6} \le \alpha \le \sqrt{6}$ **4.** $\alpha \le -1$

47. 2. Γν. φθίνουσα **3.** $x = 2$

52. 1. Γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, +∞).

54. 1. Το 5 είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f'(x) = 0$ (γιατί;)

57. 1. Γνησίως αύξουσα , **2.** $f^{-1}(x) = \ln\frac{x^3+e^x+5}{e}$, $x > 0$ **3.** $x = 1$, **4.** $x < 2$ ή $x > 3$

58. 1. τ. ελάχιστο στο 0 το $f(0) = 1$ και τ.μέγιστο στο 2 το $f(2) = e^8$

2. ελάχιστο στο 2 το $f(2) = 0$ και τ.μέγιστο στο 1 το $f(1) = 1$

3. ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 0$

4. τ.μέγιστο στο 1/e το $f(1/e) = 1 - \frac{1}{e}$, τ. ελάχιστο στο 2 το $f(2) = -\ln^2 2$

5. ελάχιστο στο 0 το $f(0) = 0$

6. 2 ρίζες **7.** 3 ρίζες

59. 1. [11, 29] , **2.** [–22, 10] , **3.** [– 1/3, 1]

60. 1. $f(0) = 4/3$, **2.** $f(2) = 8\ln 2$

61. 1. α = 1 , β = 3/2 , **2.** γν. αύξουσα στο διάστημα (– ∞, –2] , γν.φθίνουσα στο διάστημα [– 2,1] και γν. αύξουσα στο διάστημα [1, +∞).

62. 1. α = – 6/5 , β = – 3/20 , τ. ελάχ. στο 1 , τ. μέγιστο στο 2.

2. α = 2 , β = – 1/2 , τ. ελάχ. στο 3 , τ. μέγιστο στο 2.

64. 1. $A_f = (-1, +\infty)$. **2.** γν. φθίνουσα στο (–1,0] , γν. αύξουσα στο [0, +∞).

4. α = 2.

3. Ισχύει $f(x) \geq f(0)$ κ.λ.π.

65. 1. $(0, +\infty)$. **2.** Μέγιστο στο e το $f(e) = \frac{1}{e}$.

67. $\alpha = \frac{1}{e^2}$

69. 1. $y = x + 1$, **2.** $y = -4x + 6$, **3.** $y - 3 = \frac{\pi + 9}{2}(x - 1)$.

73. 1. Κοίλα κάτω στο π. ορισμού της

2. Κοίλα κάτω στο $(-\infty, 2]$

Κοίλα άνω στο $[2,+\infty)$, σημείο καμπής στο 2.

3. Κοίλα άνω στο R

4. Σημείο καμπής στο 0 (όχι στο 1)

5. Σημείο καμπής στο e.

74. 1. $-2 \leq \alpha \leq 2$ **2.** $-2 \leq \alpha \leq 2$

75. 1. $\alpha = -2$ ή $\alpha = 3$ **2.** $\alpha = -3/2$, $\beta = 9/2$ **3.** $\alpha = 4$, $\beta = 1$

78. Β) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

81. Αν παρουσιάζει καμπή στο x_o είναι $f''(x_o) = 0$ και προκύπτει $x_o e^{-x_o} - 1 = 0$ (αδύνατη) γιατί ;

82. 1. $x = 0$ (ο άξονας y΄y). **2.** $x = 2$ **3.** $x = 0$ **4.** $x = 1$, $x = 2$ **5.** $x = 1$, $x = -1$

83. 1. $y = \frac{1}{2}$, στο $\pm\infty$ **2.** $y = \frac{1}{2}$, στο $+\infty$. Δεν έχει στο $-\infty$. **3.** $y = 1$ **4.** $y = 1$

84. 1. $y = x - 1$ **2.** $y = x$ **3.** $y = 2x - 1$

85. 1. $x = -1$, $y = x - 6$

86. 1. $A_f = (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ **2.** $y = \frac{1}{2}x - \ln 2$ **3.** Κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x = -1$, $x = 1$

$x = 2$. Δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

87. 1. $\alpha = 0$, $\beta = 2$ **2.** $\alpha = 2$, $\beta = 4$ **3.** $\alpha = -1$, $\beta = -2$

88. α. 2 και 5 **β.** $\mu = 2$

89. α) 2 και $-5/7$

Γ. ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης

- ***ΑΝΑΛΥΣΗ Κεφ. 2ο***

(Διαφορικός Λογισμός)

Ανάλυση Κεφ. 2ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό – Λάθος

- ***Η έννοια της Παραγώγου***
- ***Εφαπτομένη γραφικής παράστασης***
- ***Ρυθμός Μεταβολής***

1. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι πραγματικός αριθμός. **Σ Λ**

2. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ ή $-\infty$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. **Σ Λ**

3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in R$, τότε ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$. **Σ Λ**

4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, τότε η f **δεν** είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη στο x_0. **Σ Λ**

5. Αν $f(x)=e^x$, τότε $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}$. **Σ Λ**

6. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. **Σ Λ**

7. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$. **Σ Λ**

8. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f. **Σ Λ**

9. Αν μια ευθεία (ε) έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μόνο ένα κοινό σημείο, τότε είναι οπωσδήποτε εφαπτομένη της. **Σ Λ**

10. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το [α, β] μπορεί να έχει κατακόρυφη εφαπτομένη μόνο σε άκρο του πεδίου ορισμού της. **Σ Λ**

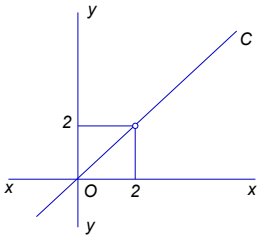
11. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη εφαπτομένη της C_f. **Σ Λ**

12. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η γραφική της παράσταση μπορεί να δέχεται μόνο κατακόρυφη εφαπτομένη. **Σ Λ**

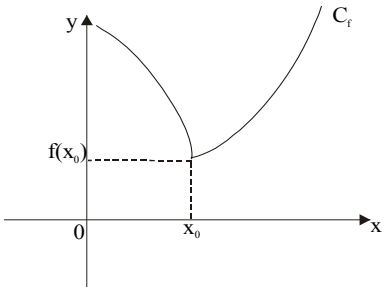
13. Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσημη στο διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Τότε η γραφική παράσταση της f δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. **Σ Λ**

14. Για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = (x-2)^2 e^x$. Τότε η C_f στο σημείο (2, f (2)) δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. **Σ Λ**

15. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f δίνεται στο σχήμα. Η παράγωγος της f στο $x_0 = 2$ είναι ίση με 1. **Σ Λ**

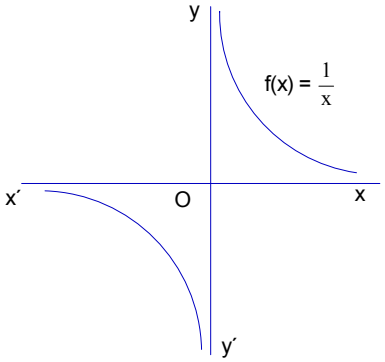


16. Η συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο σχήμα,έχει εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$. **Σ Λ**



17. Οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = x^2 - 20$ στα σημεία τομής τους με την ευθεία $x = x_0$, είναι παράλληλες. **Σ Λ**

18. Η συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$. **Σ Λ**

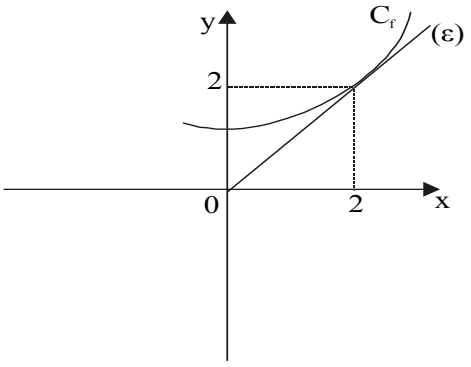


19. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας σταθερής συνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο της, συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. **Σ Λ**

20. Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$, σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της, συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. **Σ Λ**

21. Αν δυο συναρτήσεις τέμνονται, τότε στο κοινό τους σημείο δέχονται κοινή εφαπτομένη. **Σ Λ**

22. Αν η ευθεία (ε) που είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{xoy}$ στο διπλανό σχήμα είναι εφαπτομένη της C_f, ισχύει $f'(2) = 1$. **Σ Λ**



23. **α.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε θα είναι συνεχής στο x_0. **Σ Λ**

β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0. **Σ Λ**

γ. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. **Σ Λ**

δ. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε δεν είναι συνεχής στο x_0. **Σ Λ**

24. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0. **Σ Λ**

25. Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 5$, ισχύει $[f(5)]' = f'(5)$. **Σ Λ**

26. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$. **Σ Λ**

27. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, τότε ισχύει $(f(f(x)))' = (f'(x))^2$. **Σ Λ**

28. Αν το άθροισμα f + g δύο συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0. **Σ Λ**

29. Αν η συνάρτηση f (g (x)) είναι παραγωγίσιμη, τότε οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες. **Σ Λ**

30. Αν υπάρχει η f'' στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0. **Σ Λ**

31. Για μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R ισχύει:

α. αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή **Σ Λ**

β. αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια **Σ Λ**

γ. αν η f είναι περιοδική, τότε η f' είναι περιοδική με την ίδια περίοδο. **Σ Λ**

32. Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική ν-οστού βαθμού, τότε η συνάρτηση f' είναι επίσης πολυωνυμική ν-1 βαθμού. **Σ Λ**

33. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο R. **Σ Λ**

34. Σε κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού είναι η επιτάχυνση αυτού. **Σ Λ**

35. Αν $f(x) = x^4$, τότε υπάρχουν σημεία της C_f με παράλληλες εφαπτομένες. **Σ Λ**

36. Αν $y = \alpha x + \beta$, τότε ο ρυθμός μεταβολής των τιμών του y εξαρτάται από τις τιμές της μεταβλητής x. **Σ Λ**

37. Αν $f'(x) = 3x^2$, τότε ισχύει πάντα $f(x) = x^3$. **Σ Λ**

---

38. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = \left(f(x_0)\right)'$, $x_0 \in A_f$. **Σ Λ**

---

39. Αν $f(x) = \log x$, $x > 0$ τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. **Σ Λ**

---

40. Αν $f(\theta) = \eta\mu\theta^o$ τότε $f'(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta^o$. **Σ Λ**

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΦ. 2Ο

- ***Η έννοια της Παραγώγου***
- ***Εφαπτομένη γραφικής παράστασης***
- ***Ρυθμός Μεταβολής***

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου «Σωστό – Λάθος»

1. Σ	9. Λ	17. Σ	25. Λ	33. Σ
2. Σ	10. Λ	18. Λ	26. Λ	34. Σ
3. Λ	11. Λ	19. Σ	27. Λ	35. Λ
4. Σ	12. Σ	20. Σ	28. Λ	36. Λ
5. Σ	13. Σ	21. Λ	29. Λ	37. Λ
6. Λ	14. Σ	22. Σ	30. Σ	38. Λ
7. Λ	15. Σ	23. α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Λ	31. α. Σ β. Σ γ. Σ	39. Λ
8. Λ	16. Λ	24. Λ	32. Σ	40. Λ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό – Λάθος»

- ***Θεώρημα Rolle Θ.Μ.Τ.***
- ***Μονοτονία –Ακρότατα συνάρτησης,***
- ***Κυρτότητα , ασύμπτωτες γραφικής παράστασης ,***
- ***κανόνες De L' Hospital***

1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. **Σ Λ**

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $x_0 \in R$, τότε για κάθε $x \in R$ υπάρχει $\xi \in R$ ώστε $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. **Σ Λ**

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα μόνο $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\alpha) - f(\beta) = f'(\xi)(\alpha - \beta)$. **Σ Λ**

4. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 εσωτερικό του διαστήματος $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. **Σ Λ**

5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$. **Σ Λ**

6. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της $f'(x) = 0$. **Σ Λ**

7. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f'(x) = 0$, υπάρχει το πολύ μια ρίζα της $f(x) = 0$. **Σ Λ**

8. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. **Σ Λ**

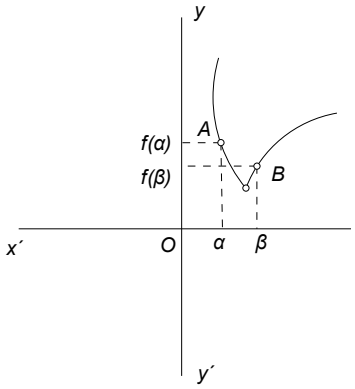
9. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], τότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f. **Σ Λ**

10. Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, χωρίς να ισχύουν (όλες) οι προϋποθέσεις του θεωρήματος. **Σ Λ**

11. Αν για μια συνάρτηση ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Fermat, σε ένα διάστημα Δ τότε υπάρχει $x_0 \in \Delta$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x. **Σ Λ**

12. Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα [α, β], τότε εφαρμόζεται και το θεώρημα της μέσης τιμής, στο ίδιο διάστημα. **Σ Λ**

13. Για τη συνάρτηση του σχήματος, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M (ξ, f (ξ)) της C_f με ξ ∈ (α,β), όπου η εφαπτομένη της C_f, να είναι παράλληλη με την AB. **Σ Λ**



14. Αν $f'(x) = (x + 3)x^2$, τότε το $x_0 = -3$ είναι θέση τ. ελάχιστου. **Σ Λ**

15. Για τη συνάρτηση $f(x) = 3x^2$, $x \in [-3, 2]$, υπάρχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο. **Σ Λ**

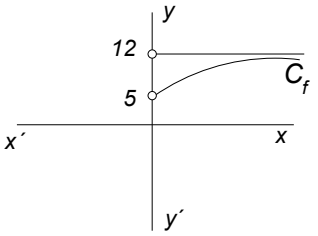
16. Για τη συνάρτηση f (x) = ημx , x∈ R, υπάρχει τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο μεγαλύτερο από κάποιο τοπικό μέγιστο. **Σ Λ**

17. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f, με $f'(x) > 0$ για $2 < x < 7$. Αν f (3) = 5, τότε μπορεί να ισχύει f (5) = 4. **Σ Λ**

18. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + 2e^x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{3}$. **Σ Λ**

19. Αν $f'(x) = e^{-x^2+9}$ τότε η f δεν μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα. **Σ Λ**

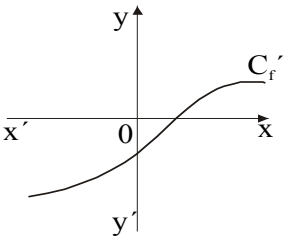
20. Η συνάρτηση του σχήματος έχει θετική παράγωγο για κάθε $x \in (0, +\infty)$. **Σ Λ**



21. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Αν σ' ένα σημείο x_0 παρουσιάζουν και οι δυο τοπικό μέγιστο, τότε και η συνάρτηση f + g, εφόσον ορίζεται, θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0. **Σ Λ**

22. Αν μια άρτια συνάρτηση έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο, τότε στο $-x_0$ θα έχει τοπικό μέγιστο. **Σ Λ**

23. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, και η γραφική παράσταση της f ΄ είναι αυτή του σχήματος, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη. **Σ Λ**



24. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) < 0$, $x \in R$, τότε $f(x) < 0$, $x \in R$. **Σ Λ**

25. Αν για τη συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R, ισχύει $f'(5) = 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 5$. **Σ Λ**

26. Μια περιοδική συνάρτηση f μπορεί να έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο. **Σ Λ**

27. Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \neq 0$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R^*. **Σ Λ**

28. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, τότε θα ισχύει $f'(x) \leq 0$. **Σ Λ**

29. Αν για μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ισχύει $f'(x) = e^x \eta\mu 4$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. **Σ Λ**

30. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f, μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f. **Σ Λ**

31. Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει τοπικό ακρότατο και σε σημείο x_0, στο οποίο δεν είναι συνεχής. **Σ Λ**

32. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$. **Σ Λ**

33. Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι μηδέν σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ. **Σ Λ**

34. Αν στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της f ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι τοπικό ακρότατο της f. **Σ Λ**

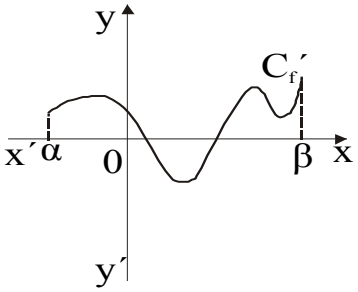
35. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε πιθανά ακρότατα της f είναι

α. τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f ΄ μηδενίζεται **Σ Λ**

β. τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f δεν παραγωγίζεται **Σ Λ**

γ. τα άκρα του διαστήματος [α, β]. **Σ Λ**

36. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f ΄ μιας συνάρτησης f. Τότε η f έχει δύο τουλάχιστον θέσεις τοπικών ακροτάτων. **Σ Λ**



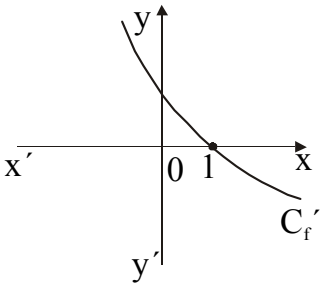
37. Αν $f'(x) = (x - 1)^2$, τότε το σημείο $x_0 = 1$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f. **Σ Λ**

38. Αν $f'(x) = |x - 1|$, τότε το σημείο $x_0 = 1$ είναι τοπικό ακρότατο της f. **Σ Λ**

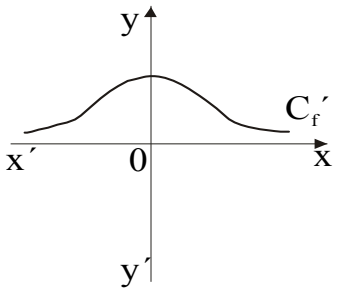
39. Αν $f'(x) = x^2 + 1$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα. **Σ Λ**

40. Αν $f'(x) = x^2 - 5x + 6$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [2, 3]. **Σ Λ**

41. Αν το διάγραμμα C_f' της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$. **Σ Λ**

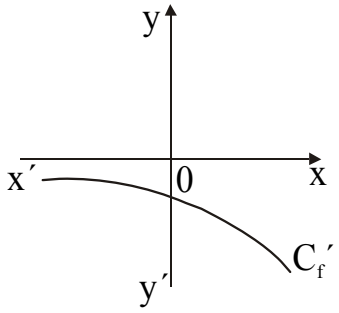


42. Αν το διάγραμμα $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.



Σ Λ

43. Αν το διάγραμμα $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.



Σ Λ

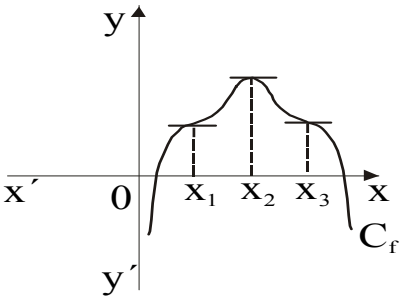
44. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με f (α) = f (β) και f ΄΄(x) > 0, για κάθε x ∈ [α, β], τότε η εξίσωση f ΄ (x) = 0 έχει μια μόνο ρίζα στο (α, β). **Σ Λ**

45. Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε:

α. το x_1 είναι σημείο καμπής **Σ Λ**

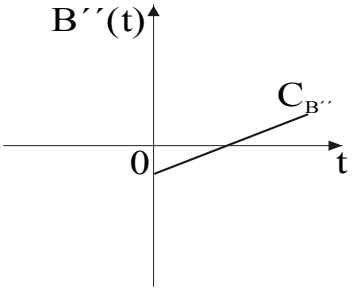
β. το x_2 είναι σημείο καμπής **Σ Λ**

γ. το x_3 είναι σημείο καμπής **Σ Λ**



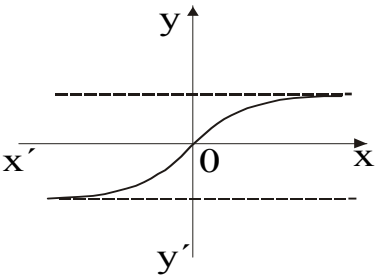
46. Αν f ΄΄ (x) = $(x – 2)^2$, τότε η f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 2$. **Σ Λ**

47. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της B΄΄(t), όπου B (t) είναι η συνάρτηση του βάρους κάποιου ανθρώπου που βρίσκεται σε δίαιτα, μετά από χρόνο t. Τότε ο ρυθμός μείωσης του βάρους, στην αρχή μειώνεται και μετά αυξάνει.



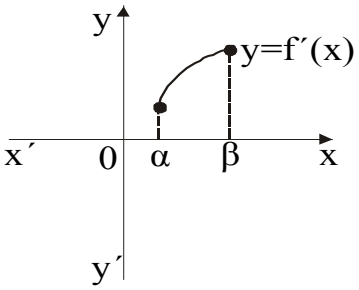
Σ Λ

48. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.



Σ Λ

49. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, και η γραφική παράσταση της f ΄ φαίνεται στο σχήμα, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

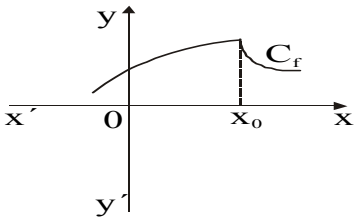


Σ Λ

50. Μια πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής. **Σ Λ**

51. Μια πολυωνυμική συνάρτηση 4ου βαθμού έχει τουλάχιστον ένα σημείο καμπής. **Σ Λ**

52. Η f παρουσιάζει στο x_0 σημείο καμπής.



Σ Λ

53. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και η f είναι κυρτή στο Δ, τότε $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. **Σ Λ**

54. Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης f, όταν η f ΄΄ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0. **Σ Λ**

55. Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$ είναι κυρτή στο R. **Σ Λ**

56. Η ευθεία x = 2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$. **Σ Λ**

57. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^5 + x^3 - 2}{x^2 + x + 2004}$ έχει μια πλάγια ασύμπτωτη. **Σ Λ**

58. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ έχει δύο κατακόρυφες ασύμπτωτες. **Σ Λ**

59. Ισχύει $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{συν}x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$. **Σ Λ**

60. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{-x}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. **Σ Λ**

61. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. **Σ Λ**

62. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$. **Σ Λ**

63. Η συνάρτηση $f(x) = e^{x}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$. **Σ Λ**

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΦ. 2Ο

- **Θεώρημα Rolle- Θεώρημα Θ.Μ.Τ**
- **Μονοτονία –Τοπικά ακρότατα-Κυρτότητα Συνάρτησης-Ασύμπτωτες**
- **Κανόνας De L' Hospital**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου «Σωστό – Λάθος»

1	Λ		15	Λ		29	Λ		40	Σ		51	Λ
2	Σ		16	Λ		30	Σ		41	Σ		52	Λ
3	Λ		17	Λ		31	Σ		42	Σ		53	Σ
4	Σ		18	Λ		32	Λ		43	Λ		54	Λ
5	Σ		19	Σ		33	Σ		44	Σ		55	Σ
6	Σ		20	Σ		34	Λ		45			56	Σ
7	Σ		21	Σ		35			α.	Σ		57	Λ
8	Σ		22	Λ		α.	Σ		β.	Λ		58	Σ
9	Σ		23	Σ		β.	Σ		γ.	Σ		59	Σ
10	Σ		24	Λ		γ.	Σ		46	Λ		60	Λ
11	Σ		25	Λ		36	Σ		47	Σ		61	Σ
12	Σ		26	Λ		37	Λ		48	Σ		62	Σ
13	Λ		27	Λ		38	Λ		49	Σ		63	Σ
14	Σ		28	Σ		39	Σ		50	Σ			

Γ. ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΦ. 2Ο
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Δημήτρης Αργυράκης **Γεράσιμος Κουτσανδρέας**

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΦ. 2Ο (Διαφορικός Λογισμός)

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Θέμα 1ο

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha \cdot \ln x + x - 2, \quad x > 0$ και $\alpha > 0$.

i. Αποδείξτε ότι: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

iii. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\alpha \in (e, e^2)$ ώστε η γραφική παράσταση της f να εφάπτεται στην ευθεία με εξίσωση : $y = 2x - 1$.

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο R με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

iii. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x , σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^0.

(ΘΕΜΑ ΙΟΥΝΙΟΣ 2003)

Θέμα 3ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, 5) \to R$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) + x^2 = 5x + 12$$

i. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις στο διάστημα (0 , 5).

ii. Αποδείξτε ότι η f έχει σταθερό πρόσημο στο (0 , 5) .

iii. Θεωρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και η C_f διέρχεται από το σημείο $N(2, 3\sqrt{2})$. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο A (1, f(1)).

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Αποδείξτε ότι $f^{-1}(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$, $x\in R$.

iii. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)-x=0$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο R.

iv. Αποδείξτε ότι η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της M(0, f(0)), έχει εξίσωση $y=-2x$.

v. Θεωρούμε ότι η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $y=-2x$. Ένας άλλος μιγαδικός αριθμός w ικανοποιεί τη σχέση $|w-2-i|=1$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|w-z|$.

Θέμα 5ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύει:
$(f\circ f)(x)=4x-3$, για κάθε $x\in R$.

i. Αποδείξτε ότι f(1) = 1.

ii. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A (1 , f(1)), αν γνωρίζουμε ότι αυτή σχηματίζει με τον άξονα x΄x οξεία γωνία.

iii. Αν $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{f(x)}{\eta\mu(2x-1)}=1$ και $\lim\limits_{x\to 1/2}\left(2x-x^2+2x-1\right)\cdot g(x)=\dfrac{5}{4}$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1/2}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$.

Θέμα 6ο

Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο [1 , 4] για την οποία ισχύουν $f(x)\neq 0$, $f(1)>0$ και $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in[1,4]$.

i. Αποδείξτε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in[1,4]$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-f(1)\cdot f(4)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_o\in(1,4)$ τέτοιο ώστε $g(x_o)=0$.

iii. Θεωρούμε ότι η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού Z κινείται στη C_f. Αποδείξτε ότι υπάρχει το πολύ ένα σημείο της C_f στο οποίο η διανυσματική ακτίνα του Z στο μιγαδικό επίπεδο , σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45° .

Θέμα 7ο

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν :

i. $f(x)\le e^x+2\ln x+x^2+1$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

ii. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

iii. Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,\ e+2)$.

Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο Α.

Θέμα 8ο

Έστω η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει

$f(x) \geq \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ για κάθε $x \in R$, $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$.

Αποδείξτε ότι:

i. $f(\alpha) = f(\beta)$

ii. $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$

iii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(x_0) = 0$

Θέμα 9ο

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(0) = 2$ για την οποία ισχύουν :

$f(\alpha + x) = f(\alpha) \cdot f(x) \cdot e^{2\alpha x}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x, \alpha \in R$.

Αποδείξτε ότι:

i. $f(0) = 1$ και $f'(x) = 2 \cdot f(x)(x+1)$, για κάθε $\chi \in R$.

ii. Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{x^2+2x}}$ είναι σταθερή στο R.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f.

(ΘΕΜΑ από Ευκλείδη β .)

Θέμα 10ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 - \ln x$, $x > 0$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Αποδείξτε ότι $x^3 \geq x^2 + \ln x$ για κάθε $x > 0$.

iii. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

iv. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha\beta\gamma = e^{2006}$ αποδείξτε ότι :
$\alpha^2(\alpha-1) + \beta^2(\beta-1) + \gamma^2(\gamma-1) \geq 2006$.

Θέμα 11ο

Έστω μια συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύ-ουν $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(0) = 0$.

Αποδείξτε ότι:

i. Η συνάρτηση $g(x) = x \cdot f'(x) - f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

ii. $x \cdot f'(x) - f(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

iii. Η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$

iv. Αν $x > 0$, να λυθεί η ανίσωση $(x^2 + 4) \cdot f(5x) < 5x \cdot f(x^2 + 4)$.

Θέμα 12ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, η οποία έχει τρεις ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ στο R .

Αποδείξτε ότι :

i. $\alpha^2 > 3\beta$

ii. Η f παρουσιάζει δύο ακρότατα διαφορετικού είδους.

iii. $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x - \rho_1} + \dfrac{1}{x - \rho_2} + \dfrac{1}{x - \rho_3}$

iv. Αν x_0 θέση τοπικού ακρότατου της f , τότε ισχύει :

$$\frac{1}{x_0 - \rho_1} + \frac{1}{x_0 - \rho_2} + \frac{1}{x_0 - \rho_3} = 0 .$$

Θέμα 13ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^5$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία .

ii. Να λυθεί η εξίσωση $e^{2(x^2 - x)} - e^{2(6-2x)} = (6 - 2x)^5 - (x^2 - x)^5$

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x(x-2) \cdot e^{f(x)}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,\ 2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \dfrac{2(1 - x_0)}{x_0(x_0 - 2)}$.

Θέμα 14ο

Έστω η συνάρτηση $f : [1,\ 3] \to R$ που είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$f(1) = f(3) = 2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : R \to R$ με τύπο $g(x) = (x^2 - 4x + 3) \cdot f(2)$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο A (2 , - 1).

i. Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

ii. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,\ 3)$, $\xi_1 \neq \xi_2$ ώστε να ισχύει:

i. $f'(\xi_1) = g'(\xi_1)$, **ii.** $f'(\xi_2) = g'(\xi_2)$

iii. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (1,\ 3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f''(\xi) = 2$.

Θέμα 15ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

$2 \cdot f(x^3) \geq f^2(x) + 1$, για κάθε $x \in R$.

i. Αποδείξτε ότι η C_f διέρχεται από τα σημεία: Α (1, 1), Β(–1 , 1) και Γ (0 , 1).

ii. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον σημεία της C_f με τετμημένες στο διάστημα $(-1\ ,\ 1)$, στα οποία η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

iii. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής της C_f.

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x \cdot e^x + f(x)$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_g με τετμημένη στο (0 , 1) ώστε η εφαπτόμενη της C_g σ' αυτό να είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $x + ey - e^2 = 0$

Θέμα 16ο

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,\ e]$ με $f(1)=2$, $f(e) = e + 1$ και σύνολο τιμών το [–1 , 4]. Αποδείξτε ότι:

i. Υπάρχουν τουλάχιστον δυο τιμές $x_1, x_2 \in (1,\ e)$, $x_1 \neq x_2$ ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

ii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,\ e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

iii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,\ e)$ τέτοιο ώστε

iv. $f(x_0)\left[f'(x_0) - 4f^4(x_0)\right] = x_0$

iv. Η ευθεία $y = -x + e + 2$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(1,\ e)$.

v. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, e)$, $(\xi_1 \neq \xi_2)$ τέτοιοι ώστε να ισχύει: $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

(ΘΕΜΑ από Ε.Μ.Ε)

Θέμα 17ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to R$, για την οποία ισχύουν : η f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και f' γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

Αποδείξτε ότι :

i. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο δηλ. $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ii. $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

iii. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi) < 0$.

Θέμα 18ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \ln x - x - 2$, με $x > 0$, $\alpha > 0$.

i. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι η $f(\alpha)$.

iii. Αν $\alpha = 1$ αποδείξτε ότι:

α. Η μέγιστη τιμή της f γίνεται ελάχιστη.

β. Υπάρχει $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{2-e}{e-1}$.

Θέμα 19ο

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) και τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν $f''(x_0) = 0$ και $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, δείξτε ότι η C_f παρουσιάζει καμπή στο x_0

Θέμα 20ο

Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$. Δείξτε ότι :

i. Αν η C_f στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ, τότε $\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$

ii. Αν η C_f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ, τότε $\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

Θέμα 21ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f.

iii. Αποδείξτε ότι ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

Θέμα 22ο

Δίνεται συνάρτηση $f : R \to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0 \in R$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση:

$f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$, για κάθε $x \in R$.

i. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot e^{-2x}$ είναι κυρτή στο R.

ii. Αποδείξτε ότι είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in R$.

(ΘΕΜΑ 1999)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΦ. 2Ο (Διαφορικός Λογισμός)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Θέμα 1ο

ii. Σύνολο τιμών το R

iii. Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Τότε η εξίσωση εφαπτομένης θα είναι

$y = \left(\frac{\alpha}{x_0}+1\right)x + \alpha\ln x_0 - \alpha - 2$. Πρέπει να ισχύει $\left(\frac{\alpha}{x_0}+1\right) = 2$ και $\alpha\ln x_0 - \alpha - 2 = -1$,

οπότε βρίσκουμε $\alpha = x_0$. Άρα πρέπει να αποδείξω ότι υπάρχει $\alpha \in (e,\ e^2)$ τέτοιο ώστε $\alpha\ln\alpha - \alpha - 2 = -1$ και εργαζόμαστε με το θ. Bolzano.

Θέμα 2ο

i. Επειδή η f' είναι διάφορη του μηδενός και συνεχής θα διατηρεί πρόσημο .κ.λ.π.

ii. Προφανής λύση το 1. κ.λ.π.

iii. Προσοχή . Εργαζόμαστε με τον ορισμό.

Θέμα 3ο

i. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (0,5)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0) = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

ii. Σχόλιο θ. Bolzano κ.λ.π.

iii. $3x - 8y + 29 = 0$

Θέμα 4ο

i. $A_f = (-1,1)$, **v.** $\sqrt{5} - 1$)

Θέμα 5ο

i. Θέτουμε όπου x το 1 και στη συνέχεια όπου x το f(1). **ii.** $y = 2x - 1$, **iii.** 1

Θέμα 6ο

i. Η συνάρτηση είναι συνεχής και διάφορη του μηδενός . Άρα διατηρεί πρόσημο κ.λ.π.

ii. θ. Bolzano

iii. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} = 1$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Θέμα 7ο

$y = (e + 4)x - 2$

Θέμα 8ο

i. Προκύπτει από την υπόθεση για x= α και x= β.

ii. Εφαρμόζουμε θ.Fermat.

iii. Εφαρμόζουμε θ. Rolle για την f΄ .

Θέμα 9ο

i. Παραγωγίζουμε και θέτουμε x= 0.

ii. Αποδεικνύουμε ότι $g'(x)=0$, για κάθε $x \in R$

iii. $g(x)=1$.

Θέμα 10ο

i. ελάχιστο το $f(1)=0$

ii. σύνολο τιμών $[0,+\infty)$

iv. Ισχύει $\alpha^3 \geq \alpha^2 + \ln\alpha$, ομοίως για β , γ , προσθέτουμε κατά μέλη και λογαριθμούμε τη σχέση $\alpha\beta\gamma = e^{2006}$ κ.λ.π.

Θέμα 11ο

i. Είναι $g'(x)>0$, $x \in [0,+\infty)$ **ii.** Είναι $g(x)>g(0)$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$ κ.λ.π.

iii. Προκύπτει από το (ii) **iv.** Η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την $h(5x)<h(x^2+4)$ κ.λ.π. βρίσκουμε $0<x<1$ ή $x>4$.

Θέμα 12ο

i. Επειδή ισχύει $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$, εφαρμόζουμε θ.Rolle …και καταλήγουμε ότι η f΄ έχει δύο ρίζες κ. λ. π.

Θέμα 13ο

ii. $x=-3$ ή $x=2$ **iii.** θ. Rolle για τη g κ.λ.π.

Θέμα 14ο

i. ελαχ. το $g(2)=-1$, συν. τιμών το $[-1,+\infty)$

ii. θ.Rolle στα διαστήματα [1,2] και [2,3] για τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$

iii. θ.Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ για την h΄ καταλήγουμε ότι $f''(\xi)=g''(\xi)$, βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της g οπότε προκύπτει $f''(\xi)=2f(2)$ και λαμβάνουμε υπ'όψη ότι f(2)= 1.

Θέμα 15ο

i. Θέτουμε στη δοθείσα όπου x το 1 και προκύπτει $(f(1)-1)^2 \leq 0$ κ.λ.π.

ii. Εφαρμόζουμε θ. Rolle στο [–1,0] και [0,1] για την f.

Θέμα 16ο

i. Από το σύνολο τιμών προκύπτει ότι η συνάρτηση έχει σίγουρα ένα μέγιστο και ένα ελάχισρο σε εσωτερικά σημεία του [1,e] άρα από θ. Fermat κ.λ.π.

ii. θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$ για την f'.

iii. Έστω $h(x) = f(x)\cdot f'(x) - 4f^5(x) - x$ και εφαρμόζουμε θ. Bolzano στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

iv. θ. Bolzano για την $f(x) + x - e - 2 = 0$.

v. Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[1, \xi]$ και $[\xi, e]$ για την f , όπου ξ το σημείο που προκύπτει από το (iv).

Θέμα 17ο

i. Από θ.Rolle στο [α,β] προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ και επειδή η f' είναι γν. φθίνουσα θα ισχύει $f'(x) > f(x_0)$ αν $x < x_0$ και $f'(x) < f(x_0)$ αν $x > x_0$. Άρα η f' αλλάζει πρόσημο δεξιά και αριστερά του x_0 (κατασκευάζουμε πίνακα) κ.λ.π.

ii. Από τον πίνακα προκύπτει ότι $f(x) > f(\alpha) = 0$ αν $x < x_0$ και $f(x) > f(\beta) = 0$ αν $x > x_0$ κ.λ.π.

iii. Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$, $[x_0, \beta]$ και στη συνέχεια Θ.Μ.Τ για την f' στο $[x_1, x_2]$ (΄0που τα x_1, x_2 από το προηγούμενο Θ.Μ.Τ.)

Θέμα 18ο

iii. β) Θ.Μ.Τ. για την f στο [1, e] κ.λ.π.

Θέμα 19ο

Έστω $f^{(3)}(x) > 0$. Εργαζόμαστε με τον ορισμό $f^{(3)}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0}$ κ.λ.π.

Θέμα 20ο

Εργαζόμαστε με το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[x_1, \dfrac{x_1 + x_2}{2}]$ και $[\dfrac{x_1 + x_2}{2}, x_2]$ και χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της f'.

Θέμα 21ο

i. τ. ελάχιστο στο -1 και τ. μέγιστο στο 1.

ii. Σημεία καμπής στα $-\sqrt{3}$, 0 , $\sqrt{3}$.

Θέμα 22ο

ii. Εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο όπως στο θέμα 17 (i) και καταλήγουμε ότι $g(x) \geq g(x_0) = 0$ κ.λ.π.