Τα βιβλία είναι όπως και οι άνθρωποι.
Μικρός αριθμός παίζει σπουδαίο ρόλο!
Τα άλλα αποτελούν το π λ ή θ ο ς.
F. Voltaire

Ιδέες για άλγεβρα Β΄ Λυκείου

Π. Μουρλάς

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1.Βρείτε το βαθμό του $p(x)=(\lambda^3 - 4\lambda)x^3 +(\lambda^2-2\lambda)x-\lambda+2$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$. (διερεύνηση)

2.Αν το $p(x)=(9\lambda^3-\lambda)x^3+(9\lambda^2-1)x^2+3\lambda-1$ είναι 2ου βαθμού, βρείτε το λ.

3.Να δείξετε ότι για κάθε α, β∈R το πολυώνυμο $p(x)=(\alpha-\beta)x^2 +(\alpha^2- \beta +1)x$ είναι μη μηδενικό.
Υπόδειξη. έστω ότι p(x)=0. (το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό;)

4.Έστωp(x)=x^2-3x+2.Βρείτε τα πολυώνυμα:
α) $p(2x+1)$ (έχει πολλές πράξεις αυτή)
β)$p(-x)$
γ) $p(x^2-1)$.

5.Αν για το p(x) ισχύει : $p(2x-1)=4x^2-8x+1$,βρείτε το p(x).
Υπόδειξη. Θέτω ω=2x-1

6.Αν τοp(x)έχει ρίζα το 1, να δείξω ότι το πολυώνυμο $Q(x)=p(x^2-3)+(x-2)p(3x)$ έχει ρίζα το 2.
Υπόδειξη. Q(2)=0

7.Βρείτε πολυώνυμο p(x) ώστε: $[p(x)]^2-p(x)=x^2+x$.
Υπόδειξη. έστω p(x)=αx+β

8.Βρείτε πολυώνυμο p(x) ώστε:p(p(x))=4x+3.

9.Αν για το p(x) είναι p(0)=2 και p(-1)=3, βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης p(x) με τοx(x+1).
Υπόδειξη. έστω υ(x)=αx+β, (δεςπαρατήρηση παρακάτω)

10.Αν το υπόλοιπο της διαίρεσηςενός πολυωνύμουp(x) με το $3x^2-x-4$ είναι2x+5,βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του p(x) με τοx+1.

Υπόδειξη. $3x^2$-x-4=(3x-4)(x+1).(δεςπαρατήρηση παρακάτω)
Αν θέλουμε να βρούμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του p(x) με το δ(x) τότε αν δ(x)=x-ρ το υ=p(ρ), αν δ(x) δεν είναι της μορφής x-ρ βρίσκω τη μορφή υ(x) από το βαθμό του δ(x)
P(x)=δ(x)π(x)+υ(x) (1) και από τις τιμές του p(x) που έχω αντικαθιστώντας στην (1) θα βρω το υ(x).

11.Το πολυώνυμο p(x) διαιρούμενο με x+1 αφήνει υπόλοιπο 2 και διαιρούμενο με x-$\frac{1}{2}$αφήνει υπόλοιπο$\frac{3}{2}$.Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης p(x) με το $2x^2$+x-1.(μήπως τώρα είναι εύκολη?)

12.Αν το p(x)=x^3+αx+β-α έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του πολυωνύμου x^2-2x, βρείτε α και β.

13.Αν το p(x)=x^3-αx+β-1 έχει παράγοντα το x^2-3x+2 βρείτε τα α και β.

14.Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης p(x) με το x-1 είναι 2, να δείξετε ότι τοq(x)=p(3x+7)-x^2+2έχει παράγοντα το x+2.
Υπόδειξη. Q(-2)=0

15.Βρείτε τα α,β ώστε το p(x)= x^3+αx+β να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.
Υπόδειξη. 1+α+β=0 ,x^3+αx+β=…=(x-1)(x^2+x+1+α)

16.Βρείτε τα α, β ώστε το p(x)=x^3+αx^2+βx-1 να έχει παράγοντα το x^2+1.
Υπόδειξη.x^3+αx^2+βx-1=(x^2+1)(x+α)+(β-1)x-1-α ,β=1,α=-1.

17.Αν το p(x) έχει παράγοντα το x-5, να δείξετε ότι το p(2x-3) έχει παράγοντα τοx-4.

18.Να βρείτε τους πραγματικούςκ,λ ώστε:
τοp(x)=($κ^2$-$λ^2$)x^4+2($λ^2$-λ-κ)x+2 να έχει παράγοντα το x-1.

Έχεις καμιά ιδέα για το παρακάτω.(θα χρειαστεί αργότερα)
Ποια τα α,b ώστε να ισχύει:$\frac{4x-7}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$,$x\neq 1,2$

19.Δίνεται $f(x)=x^3-(\lambda+6)x^2+(3\lambda-1)x+20, \lambda\in R$

α) Βρείτε το λ ώστε η γραφική παράσταση της fνα τέμνει τον xx΄ στο σημείο με τετμημένη 2.*(x=2)*
β) για λ=-1 να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της fβρίσκεται κάτω από τον xx΄.*(ανίσωση)*

20.Δίνονται $p(x)=2x^3-x^2+x-\alpha^2-\beta^2$ και $q(x)=(1-\alpha)x^3-(\beta+6)x^2+11x-6$.
α)Βρείτε α,β ώστε η γραφική παράσταση της p(x) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων .(περνά από το (0,0))
β)Για α=β=0 να βρείτε τις τιμές των x ώστε η γραφική παράσταση του q(x)να είναι πάνω από xx΄.

21.Βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) =x^3+9$ και$g(x)=5x^2-3$.*(εξίσωσε)*

22.Βρείτε τα διαστήματα του x, στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)=x^4+6x$βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της$g(x)=2x^3+2x^2+3$.

23.Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $2x^4-3x^3-17x^2+27x-9=0$ β) $x^6-7x^2=6$γ)$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$ δ) $2x^4-3x^3-4x^2+3x+2=0$

24.Να λύσετε τις ανισώσεις:
α)$x^3-7x-6> 0$β)$2x^3+3x^2+4<x^4+8x$
γ)$x^4+x \geq 3x^2+4x+4$ δ)$-x^3+3x+2<o$
ε)$4x^4-8x^2+5x^2-x \geq o$ζ) $x^4-2\leq x(1-x)-x^3$

25.Να λυθούν οι εξισώσεις:
α)$2ημ^3x+3συν^2x-3ημx-1=0$ β)$2συν^4x-5συν^3x+5συνx-2=0$

γ)$\frac{2x^2}{x+1}+\frac{5}{3-x}=-\frac{x^2+11}{x^2-2x-3}$δ) $(\frac{\chi-1}{\chi})^2-5\left(\frac{\chi-1}{\chi}\right)+6=0$*(θέτω)*

26. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^2+\frac{3x^2-x-1}{x-1}$ - $\frac{x^2-2}{x-x^2}$ >0β)$\frac{\chi^3+2\chi-4}{\chi-2}<1$

γ)$\frac{5\chi^3+1}{\chi^2-1}+\frac{3}{1-\chi}>0$δ)$\frac{\chi^2}{\chi-1}>\frac{2}{\chi^2-1}$

27.Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\sqrt{5\chi-1}=8-\chi$ β)$\sqrt{\chi^2-2\chi+6}$=2χ-3

γ)$\sqrt{\chi+2}-\sqrt{\chi-6}=2$ δ)$\sqrt{2+\sqrt{\chi-5}}=\sqrt{13-\chi}$

28.Δίνεται το πολυώνυμο:$p(x)=\alpha x^3+(\beta-1)x^2-3x-2\beta+6$,όπου $\alpha,\beta\in R$
α)Αν ο αριθμός 1είναι ρίζα του p(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσηςp(x) με το x+1 είναι ίσο με 2,να δείξω ότι α=2,β=4.
β)Για τις τιμές των α,β του ερωτήματος α) να λύσετε την εξίσωση p(x)=0.*(ωραία για εξετάσεις)*

29.Δίνεται το πολυώνυμο:$p(x)=\kappa x^3-(\kappa+\lambda)x^2+\lambda x+1$.
α)Ανp($-\frac{1}{2}$)=7 και p(-1)=23, να δείξετε ότι κ=-6,λ=-5
β)Να γίνει η διαίρεση p(x):(2x+1) και να γραφεί το p(x) με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.
γ)Να λυθεί η ανίσωση : p(x)>7. *(εξετάσεις)*

30.Δίνεται το πολυώνυμο $p(x)=x^4-8x^3+(5\alpha-1)x^2+8x-3\alpha-6$,όπου $\alpha\in R$
α) Να κάνετε τη διαίρεση του p(x) δια του x^2-1 και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.
β)Να βρείτε την τιμή του α ,ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναιτέλεια .
γ)Για α=3 ,βρείτε τις ρίζες της εξίσωσηςp(x)=0 καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης p(x) είναι κάτω από τον άξονα xx΄.*(εξετάσεις)*

31.Α.Δίνεται το $p(x)=α_νx^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+….+α_1x+α_0$.Να δείξετε ότι α)$p(0)=α_0$και β) $p(1)=α_ν+α_{ν-1}+…+α_1+α_o$
Β. Δίνεται το πολυώνυμο $p(x)=(x^3-3x^2+1)^{2013} + (2x^2-1)^{2012} + 1$
Να υπολογίσετεα) το σταθερό όρο του p(x).
β)το άθροισμα των συντελεστών του p(x).
Γ.Αν το άθροισμα των συντελεστών ενός πολυωνύμου είναι μηδέν, να δείξετε ότι το πολυώνυμο αυτό έχει παράγοντα το x-1.

32. Αν οι αριθμοί $α_{0,}$ ρ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $p(x)=α_νx^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+….+α_1x+α_0$ τότε να δείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα και του πολυωνύμου f(x)=p(p(p(x))).

33.Δίνονται τα πολυώνυμα p(x) και q(x)=p(x)-x
Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα τουq(x) τότε να δείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα και του πολυωνύμου φ(x)=p(p(x))-x.

Μερικές ερωτήσεις κατανόησης …

1. Τι καλούμε μονώνυμο του x ;
2. Τι καλούμε πολυώνυμο του x;
3. Πότε λέμε ότι δύο πολυώνυμα είναι ίσα;
4. Πότε ένα πολυώνυμο λέγεται μηδενικό;
5. Πότε ένα πολυώνυμο p(x) λέμε ότι έχει βαθμό κ;
6. Τι λέμε αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για x=ρ;
7. Πότε ο αριθμός ρ λέγεται ρίζα ενός πολυωνύμου p(x);

➢ ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1.Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Είναι δηλαδή υ=p(ρ).

Απόδειξη:

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου p(x) με το x-ρ γράφεται:p(x)=(x-ρ)π(x)+υ(x).

Επειδή ο διαιρέτης είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο υ. Άραp(x)=(x-ρ)π(x)+υ

Γιαx=ρ έχω p(ρ)=(ρ-ρ)π(ρ)+υ=0+υ=υ.

2.Να δείξετε ότι ένα πολυώνυμορ(x) έχει παράγοντα το x-ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του p(x).

Απόδειξη:

<u>Ευθύ</u>.Έστωότι το x-ρ είναι παράγονταςτου p(x) τότε p(x)=(x-ρ)π(x)Από την ισότητα αυτή για x=ρ έχω p(ρ)=(ρ-ρ)π(ρ)=0 Που σημαίνει ότι τορ είναι ρίζα του p(x).

<u>Αντίστροφο</u>. Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του p(x),δηλαδή ισχύει p(ρ)=0 τότε από τη σχέση p(x)=(x-ρ)π(x)+p(ρ)=(x-ρ)π(x)+0=(x-ρ)π(x) άρα το x-ρ είναι παράγοντας του p(x).

3.Έστω η πολυωνυμική εξίσωση:

$\alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\chi + \alpha_0$=0 με ακέραιους συντελεστές.

Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Απόδειξη:

Αν ο ρ≠0 είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε

$\alpha_\nu\rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\rho + \alpha_0 = 0$ ή

$\alpha_o = -\alpha_\nu\rho^\nu - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} - \cdots - \alpha_1\rho =$

ρ($-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \cdots - \alpha_1$)

Επειδή οι ρ ,$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ είναι ακέραιοι, έχουμε ότι και ο $-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \cdots - \alpha_1$ είναι ακέραιος.

Από την τελευταία ισότητα έχω ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0.

Ηουσία είναι στις παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις

➢ ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. η διαίρεση του p(x) με το x-ρ είναι τέλεια.

2.το υπόλοιπο της διαίρεσης του p(x) με τοx-ρ είναι 0.

3. υ=p(ρ)=0

4. το ρ είναι ρίζα του p(x).

5.p(x)=(x-ρ)π(x)

6.x-ρ παράγοντας του p(x).

7.το p(x) διαιρείται ακριβώς με το x-ρ

8. το x-ρ διαιρεί το p(x).

➢ Για δες και αυτές τις δυο ασκησούλες.

1.Αν α,β είναι ακέραιοι αριθμοί με α+β=6, τότε η εξίσωση $\alpha x^4-3x^3+\beta x^2-6\beta x+1=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες. (με άτοπο)
2.Δίνονται τα πολυώνυμα :$\pi(x)=2x^4-6x^3+5x^2-3x+2$, $t(x)=-2x^4+6x^3-5x^2+3x$.α) μεhorner δείξε ότι το π(x) διαιρείται ακριβώς με το x^2-3x+2.β) βρες το πηλίκο της διαίρεσης π(x) διαx^2-3x+2. γ) λύσε την ανίσωση :t(x) >t(1).

❖ ΑΝΑΠΑΝΤΕΧΟ!

Καθηγητής : Τι γνωρίζεις για τον βαθμό ενός πολυώνυμου;

Μαθητής: Για τον βαθμό του πολυωνύμου δεν γνωρίζω, γνωρίζω όμως για τον βαθμό που θα πάρω στον έλεγχο!!!

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.Να δείξετε ότι :

α)$\begin{vmatrix} \alpha^3 & -2\alpha^2 \\ 3\alpha & -1 \end{vmatrix} = 5\alpha^3$ β)$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \varepsilon \\ \gamma+\delta & \zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \varepsilon \\ \delta & \zeta \end{vmatrix}$

γ) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\lambda\beta & \beta \\ \gamma+\lambda\delta & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\kappa\gamma & \beta-\kappa\delta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$

2 Δίνονται οι ευθείες ε_1: x-2ψ=6 και ε_2 :3x+4ψ=8
Να βρεθεί το σημείο τομής τους (γραφικά-αλγεβρικά).

3.Δίνονται οι ευθείες ε_1 : x+λψ-3=0 και ε_2:λx-4ψ+4=0
Δείξτε ότι οι ευθείες τέμνονται για κάθε λ$\in \mathcal{R}$

4. Να λυθούν τα συστήματα:

α)$\begin{cases} \frac{3}{|\chi-1|} + \frac{4}{|\psi+2|} = 7 \\ \frac{5}{|\chi-1|} - \frac{1}{|\psi+2|} = 4 \end{cases}$ β)$\begin{cases} 6\chi^2 - 3\psi^2 = 21 \\ 4\chi^2 + 3\psi^2 = 19 \end{cases}$

γ) $(\chi-2\psi-1)^2 + |2\chi+\psi-12| = 0$

5. **Ν**απροσδιοριστεί το λ ώστε το σύστημα:

$\begin{cases} (\lambda+3)\chi + (\lambda-1)\psi = 2\lambda+1 \\ (\lambda-2)\chi - (\lambda-1)\psi = 3\lambda+1 \end{cases}$ είναι αδύνατο.

6. Για ποιες τιμές των λ,μ τα παρακάτω συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα. (εξετάσεις)

$\begin{cases} (2\lambda-1)\chi + 10\mu\psi = 3 \\ 2\chi + 4\psi = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} (\lambda-2)\chi - (\mu+1)\psi = 7 \\ 3\chi - 6\psi = 5 \end{cases}$

7.Για τις διάφορες τιμές του λ να λυθούν – διερευνηθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} (\lambda-1)\chi+2=-2\lambda\psi \\ 2\lambda\chi+(\lambda-1)\psi=\lambda-4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \lambda\chi+\psi=\lambda^2 \\ \chi-\lambda\psi=\lambda^4 \end{cases}$

8.Ναλυθεί το σύστημα 2x2 με αγνώστους τα χ,ψ όταν $D^2+{D_X}^2+{D_\psi}^2+2D-4D_X+6D_\psi+14=0$.

9.Να λυθεί το σύστημα 2x2 με αγνώστους τα χ,ψ όταν ${D_X}^2+{D_\psi}^2+5D^2=4D.D_X-2D\,.D_\psi$ και έχει μοναδική λύση.

10.Να λυθεί το σύστημα 2x2 με αγνώστους χ,ψ όταν
$3D_X-5D_\psi=Dkai \quad 6D_X+D_\psi=13DkaiD\neq 0$

11.Έστω το σύστημα :$\begin{cases} 2x-\psi=\lambda-1 \\ 3\chi+2\psi=3\lambda \end{cases}$, λ∈ $\mathbb{R}$

α) Να δειχθεί ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση,$\forall\lambda\in\mathbb{R}$

β) Να βρεθεί η μοναδική λύση.

γ)Να βρεθεί η τιμή του λ ,ώστε : χ-ψ=$\frac{4}{7}$

12.Έστω οι ευθείες ψ=$(\lambda^2+\lambda)\chi-2,\psi=-\chi-1$

α) Να δειχθεί ότι οι ευθείες τέμνονται $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Αν (χ_0,ψ_0) το σημείο τομής τους να δειχθεί ότι $\chi_0+\psi_0=-1$

13. Να λυθεί το σύστημα 2x2 με αγνώστους τα χ,ψ όταν

$$\begin{cases} D+D_X+D_\psi=2 \\ 2D+D_X=1 \\ D-D_X-2D_\psi=-2 \end{cases}$$

14.Δίνεται η συνάρτηση : f(x)=$\dfrac{\begin{vmatrix} x^2 & 4 \\ x & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x \\ 2 & x \end{vmatrix}}$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού και να γίνει η γραφική παράσταση της f.

➢ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ 2Χ2.

1. Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_X, D_Ψ και τις παραγοντοποιούμε (όπου είναι δυνατό).
2. Έστω ρ_1, ρ_2 κλπ οι ρίζες του $D(\lambda)$.

   α) Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \rho_1, \rho_2$ κλπ ,τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση , ($\chi = \frac{D_X}{D}$, $\psi = \frac{D_\Psi}{D}$).

   β) Αν $D=0 \Leftrightarrow \lambda=\rho_1, \lambda = \rho_2$ κλπ τότε υπολογίζουμε τις D_X, D_Ψ πρώτα για $\lambda=\rho_1$.

Αν $D_X \neq 0$ ή $D_\Psi \neq 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Αν $D_X = 0, D_\Psi = 0$ τότε αντικαθιστούμε την τιμή $\lambda=\rho_1$ στο σύστημα και εξετάζουμε αν είναι αόριστο ή αδύνατο.Στην περίπτωση που είναι αόριστο βρίσκουμε τις άπειρες λύσεις.

Όμοια εργαζόμαστε για $\lambda=\rho_2$ κλπ.

➢ **Ερώτημα;**

Το σύστημα $\begin{cases} 0\chi + 0\psi = 7 \\ 0\chi + 0\psi = 0 \end{cases}$ είναι αόριστο;

($D_X=D_\Psi=D=0$)

❖ ΑΝΑΠΑΝΤΕΧΟ

Καθηγητής: Γιατί δεν έκανες τις ασκήσεις σου σήμερα;

Μαθητής: Για όλα φταίει το σ ύ σ τ η μ α…

ΛΟΓΑΡΙΘΜΕΣ-ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

   $\log_{0,01} 100$, $\log_{0,5} 64$, $\log_8 4\sqrt{2}$, $\log_2 \frac{1}{\sqrt{32}}$, $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{81}{16}}$

   (Ορισμός)

2. Να βρείτε τον αριθμό χ στις παρακάτω ισότητες:

   $$\log_5 x = -1 \,, \log_8 x = -\frac{5}{3} \,, \log_x 36 = 2 \,, \log_x 3 = \frac{1}{4}$$

   (Ορισμός)

3. Να αποδείξετε τις ισότητες:

   $3\log_3 2 - \log_3 32 + 2\log_3 6 = 2$

   $$\log 3 + 2\log 4 - \log 12 = 2\log 2$$

   (ιδιότητες)

4. Να βρείτε τους παρακάτω αριθμούς:

   $$3^{1+\log_3 2}, 10^{2-\frac{1}{2}\log_{10} 5}, \left(\frac{1}{e}\right)^{2-\ln\sqrt{2}}$$

5. Αν $\chi = \log_\alpha(\beta\gamma)$, $\psi = \log_\beta(\gamma\alpha)$, $\omega = \log_\gamma(\alpha\beta)$ να δειχθεί:

   $$\alpha^{x-2}\beta^{\psi-2}\gamma^{\omega-2} = 1 \;\; \kappa\alpha\acute{\iota}\; \chi + \psi + \omega + 2 = \chi\psi\omega$$

6. Να λύσετε ως προς ψ τις ισότητες:

   $$e^{x\psi} = 3,\ \chi + \log_3(2\psi - 1) = 4,\ \ 10^{\chi+\psi}(\chi^2+1)\alpha = 2\chi^4 + 3$$

7. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

   1) $f(x)=\log(x^2-1)$ 2) $f(x)=\ln\frac{x-3}{5-x}$

   2) $f(x)=\ln\frac{e^x-1}{e-e^x}$ 4) $f(x)=\sin x \;\ln\frac{7-x}{7+x}$

8.Να λυθούν οι εξισώσεις: $3^{2x-1}=5$, $2^{2^x} = 3$

9.Αν οι α,β είναι θετικοί με $\alpha^3+\beta^3-6\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2=0$

Να αποδείξετε ότι :

$\log\frac{\alpha+\beta}{3} = \frac{1}{2}(\log\alpha + \log\beta)$.

10.Ναβρείτε το π.ο. της f/f(x)=log$\frac{3-x}{3+x}$και να δειχθεί
$1)\ f\ \ 1-1\ \ \ \kappa\alpha\iota\ \ \ 2)\ f\ \ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}$*(f(-x)=f(x))*

11.Να λύσετε τις παρακάτω λογαριθμικές εξισώσεις:
1) $\log_5(3\chi+2)-\log_5(\chi+1)=\log_5 2$
2)$\log(\chi-1)+\log(\chi+2)=2(1-\log 5)$
3)$\frac{1}{3}\log_3(\chi-2)+\log_3 2=\log_3(\chi-1)$
4) $\log_2(9^{\chi-1}+7)=2+\log_2(3^{\chi-1}+1)$
5)$x\log 5-\log(1+2^x)=x-\log 6$

12.Να λύσετε τις παρακάτω λογαριθμικές εξισώσεις:
1)$3^{x-1}=e^{2-x}$, 2)$x^{ln\, x^3}=e^2$,3)$6^x+6=2^{x+1}$+3^{x+1}
4) $\ln(e^x+2^x)=x+\ln 3$ 5)ημ(lnx)=0στο (0,1+lnπ).

13. α) Να δείξετε ότι : $5^{\ln x}=x^{\ln 5}$,οπου xθετικό
β) Να λύσετε την εξίσωση: $25^{\ln x}+4x^{\ln 5}+3=0$

14.Να βρεθεί το α∈ Rώστε f/f(x)=$\left(\frac{2a-1}{1+a}\right)^x$
ναα) ορίζεται για κάθε x∈ R
β) ορίζεται για κάθε x∈R και ηfείναι γν. φθίνουσα.

15. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α)$7.3^{\chi-1}+5^{\chi+1}=3^{\chi+2}+5^{\chi}$ β) $(1-2x)^{4x^2-10x+5}=1-2x$

16.Να λύσετε τις ανισώσεις:
α) $\ln(1-x)>1+lnx$ $\beta)\ \frac{2lnx+1}{lnx+1}>1$ $\gamma)\ ln^2x-\ln x^2-3>0$
δ) $3^{2\sqrt{x}}\leq 9$ $\beta)\ \left(\frac{\chi}{e^2}\right)^{\ln x+1}\geq 1$γ)$5^{\sqrt{x}}\leq(\sqrt{5})^x$δ)$x^{\ln x}>e$

17.Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\log_2(x+3)-\log_2(\psi+2)=2$
$3^x+3^\psi=30$

β) $x+\ln\psi=1$
$\psi=e^x+1-e$

18. Για κάθε α,β> 0 $να\ δείξετε\ ότι$: $a^{\log\beta}=\beta^{\log\alpha}$ και να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x^{log\psi}+\psi^{logx}=200 \\ \log\sqrt{x\psi}=\frac{3}{2} \end{cases}$

19.Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \ln x\psi=3\ln 3 \\ \ln x\ln\psi=2ln^2 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 5^{\chi}-2^{\psi}=1 \\ xln5+\psi ln2=20 \end{cases}$

20.Αν $\frac{loga}{\beta-\gamma}=\frac{log\beta}{\gamma-\alpha}=\frac{log\gamma}{\alpha-\beta}$ να δείξετε ότι:$\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}=1$

21.Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x^{lnx}

α) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=e^3x^2.

β) Να αποδείξετε ότι f(2θ)> θ^{ln4} ,θ> 0

22Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ln(2^x-5).Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f

β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της fμε τους άξονες

γ) τα διαστήματα του χόπου η γραφική παράσταση τηςf βρίσκεται κάτω από τον άξονα xx΄

23.Δίνεται η συνάρτηση f(x)=α$\frac{e^x+1}{e^x-1}$όπου γραφ. παράστασή της διέρχεται από το σημείο (ln2,3).

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να αποδείξετε ότι α=1.

γ) Να λυθεί η ανίσωση f(x)>2

24.Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ln(9^x-$3^x e^x$)

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να δείξετε ότι f(1)<0

γ)Να βρείτε τα διαστήματα του χόπου η γραφική παράσταση της fείναι πάνω από την ευθεία : ψ=2x+ln2

25. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ln$\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$.

α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση fείναι περιττή

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς f(0) και f$\left(\frac{1}{3}\right)$

δ) Να λύσετε την εξίσωση: f(x)+f(x+1)=0.

26. Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x)=\alpha(\log x)^4+8(\log x)^2.\log(100x), x>0, \alpha\in R$

α) αν f(10)=25, να δείξετε ότι α=1

β) για α=1 να δειχθεί ότι : $f(x)=(\log^2 x+4\log x)^2$και να λυθεί η εξίσωση f(x)=0.

27.Δίνονται οι συναρτήσεις:

F(x)=ln$\sqrt{2^x-3}$και Γ(x)=$\sqrt{\ln(2^x-3)}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των F,Γ

β) Να λυθεί η εξίσωση : F(x)=Γ(x)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς F(3) και Γ(3)

28. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ln$\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x).

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=2ln2

γ) Να λύσετε την ανίσωση f(x)>0.(εξετάσεις)

29.Δίνεται η συνάρτηση f(x)=$\left(\frac{\alpha-1}{5}\right)^x$

α) Να βρείτε τις τιμές του α∈R, για τις οποίες η fορίζεται σε όλο το R.

β) Να βρείτε τις τιμές του α∈R, για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) αν α=11 να λυθεί η εξίσωση f(x)+f(x+1)=6. (εξετάσεις)

Συνηθισμένα λ ά θ η μαθητών…

- $ln(\alpha+\beta)=ln\,\alpha.ln\,\beta$
- $\frac{ln\,\alpha}{ln\,\beta}=ln\,\alpha-ln\,\beta$

ΔΥΟ ΜΕΓΑΛΟΙ μικρής ηλικίας (Ιστορικό σημείωμα)

Υπάρχουν τύποιεπίλυσης για εξισώσεις βαθμού μεγαλυτέρου του 4;

Η μεγαλύτερη συμβολή στην τελική επίλυση του προβλήματος δόθηκε στις αρχές του 19ου αιώνα από τους νεαρούς Abel και Galois.ΌΝορβηγός Abel απέδειξε το 1824(ήταν 22 ετών) ότι δεν υπάρχουν τύποι όπως στην 2ου ,3ου ,4ου βαθμού, που να δίνουν τις ρίζες μιας γενικής εξίσωσης 5ου βαθμού. ΌAbel πέθανε 27 χρονών από κακουχίες και φυματίωση. Κατά τους βιογράφους του, ταξίδευσε στην Ευρώπη πεζός… για να συναντήσει τους μεγάλους μαθηματικούς της εποχής του. Ό Γάλλος Galois ο οποίος ασχολήθηκε και αυτός με το ίδιο θέμα ,έγραψε τις ανακαλύψεις του την τελευταία μέρα της ζωής του σε ένα δυσανάγνωστο χειρόγραφο 31 σελίδων, αφού προηγούμενα είχε τραυματισθεί σε μια μονομαχία με αλητήριους της νύχτας(1832).Την ημέρα που πέθανε δεν είχε συμπληρώσει τα 21 χρόνια του.

Αν σας έκαναν εντύπωση οι παραπάνω γραμμές μήπως μπορείτε να βρείτε περισσότερες πληροφορίες για τους Abel,Galois;

- **ΑΝΑΠΑΝΤΕΧΟ**

Καθηγητής: Πρέπει να μελετήσετε συναρτήσεις?

Μαθητής: Γιατί κύριε, είμαστε ασυνάρτητοι…

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο των συναρτήσεων:

α) f (x) =2ημxβ) f(x)=3συν2x
γ) f(x)=5ημ3x δ) f(x)=4συν3x

2. Να βρείτε την περίοδο των συναρτήσεων:

α) f(x)=ημ2xβ) f(x)=5συν3x
γ)f(x)=3ημ$\frac{x}{2}$δ) f(x)= -2συν$\frac{x}{3}$

3. Αν η συνάρτηση f(x)=ασυν$\frac{x}{\beta}$, με α,β>0 έχει μέγιστο το 2 και περίοδο Τ=6π να βρείτε:

α) Τον τύπο της συνάρτησης
β) Τις τιμές f(2π) και f($\frac{\pi}{2}$)

4. Αν η γραφική παράσταση της f(x)=ασυν$\frac{x}{\beta}$ διέρχεται από το σημείο M(2π,-2) να βρείτε:

α) την περίοδο της f
β) το μέγιστο και το ελάχιστο της f(x)
γ) τη γραφική παράσταση της f(x)

MEGA σχόλιο!

Σε μια συνάρτηση της μορφής f(x)=ρημωx,όπου ρ,ω>0
α) Το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της που είναι ίση με –ρ
β) Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης που είναι ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$
Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για συνάρτηση της μορφής f(x)=ρσυνωx όπου ρ,ω>0.

5. Να λυθούν οι τριγωνομετρικές εξισώσεις:

i. $2ημ^2x-3ημx+1=0$

ii. $16συν^4x-25συν^2x+9=0$

iii. $\sqrt{3}ημx+συνx=0$

iv. ημx+συνx=0στο [0,π]

v. $ημ^2x-συν^2x=0$

vi. $εφ^2x-(\sqrt{3}+1)εφx+\sqrt{3}=0$

vii. $3(1-συνx)=ημ^2x$στο [0,2π]

viii. $\frac{1}{(συνx)^2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}εφx=2$

ix. εφxσφ2x=1

x. $εφ(\frac{\pi}{4}-5x)=\sqrt{3}$

xi. $συν\frac{x}{5}+1=0$

xii. $(2\,συνx+1)\,(εφ^2x-3)σφx=0$

xiii. εφxημx +1 =ημx +εφx

MEGA σχόλιο

- **ημx=ημα** $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \alpha \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$

- **συνx=συνα** $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \alpha \\ x = 2\kappa\pi - \alpha \end{cases}$

- **εφx=εφα ⇔x=κπ+α**

  όπου κ∈ $\boldsymbol{Z}$

  Ηισότητα συνεφαπτομένων είναι η ίδια με την ισότητα εφαπτομένων.

Θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- ✓ **ημ^{2}α+συν^{2}α=1**
- ✓ **εφα=**$\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$
- ✓ **σφα=**$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$
- ✓ **ημ^{2}α=**$\frac{(\varepsilon\varphi\alpha)^2}{1+(\varepsilon\varphi\alpha)^2}$
- ✓ **συν^{2}α=**$\frac{1}{1+(\varepsilon\varphi\alpha)^2}$
- ✓ **εφασφα=1**
- ✓ **-1≤ημα≤1 -1≤συνα≤1**
- ✓ **Η εφα ορίζεται αν και μόνο συνα≠0⇔ α≠κπ+**$\frac{\pi}{2}$
- ✓ **Η σφα ορίζεται αν και μόνο ημα≠0⇔α≠κπ**

❖ ΑΝΑΠΑΝΤΕΧΟ (Πραγματικό γεγονός)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Ποιος θα συνεχίσει την παράσταση;

$$\frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu 3x}$$

ΜΑΘΗΤΗΣ: Κύριε αν απλοποιήσω θα πάρουμε $\frac{2}{3}$

6. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$

ii. $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\eta\mu\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\eta\mu\alpha}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\,\alpha}$

iii. $(\frac{1}{\eta\mu\alpha}-\eta\mu\alpha)(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}-\sigma\upsilon\nu\alpha)$=ημασυνα

7. Να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\varepsilon\varphi\,(\pi-\alpha)\sigma\upsilon\nu\,(2\pi+\alpha)\sigma\upsilon\nu\,(\frac{9\pi}{2}+\alpha)}{\eta\mu\,(13\pi+\alpha)\sigma\upsilon\nu\,(-\alpha)\sigma\varphi\frac{21\pi}{2}-\alpha)} = -1$$

<u>Ιστορικό σημείωμα</u>

Η τριγωνομετρία ξεπήδησε στην προσπάθεια να θεμελιωθεί η αστρονομία για να προβλεφθούν οι θέσεις των ουρανίων σωμάτων. Πρωταγωνιστές στη κλασσική περίοδο της αρχαίας Ελλάδας ήσαν οι Ίππαρχος- Μενέλαος- Πτολεμαίος.

MEGA σχόλιο (Αναγωγή στο 1^0 τεταρτημόριο)

- **Οι αντίθετες γωνιές έχουν ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.**
- **Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.**
- **Οι γωνίες που διαφέρουν κατά π έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο.**
- **Στις συμπληρωματικές γωνίες εναλλάσσονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δηλ το ημίτονο σε συνημίτονο και η εφαπτομένη σε συνεφαπτομένη.**
- **Αυτές που διαφέρουν κατά 2κπ έχουν ίδιους όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς.**
- **Αυτές που έχουν άθροισμα $\frac{\pi}{2}$ τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με την συνεφαπτομένη της άλλης.**

Προσοχή!!

-συνθ=συν(π-θ), -ημθ=ημ(-θ)

Ερώτημα: *Υπάρχει γωνία α έτσι ώστε ημα=0 και συγχρόνως συνα=0;*

Απάντηση: *Όχι (γιατί;)*

- **ΑΝΑΠΑΝΤΕΧΟ (πραγματικό γεγονός εξετάσεις 2004) Θέμα σχετικά για τη μονοτονία του ημιτόνου Απάντηση μαθητή: Είναι ένα πράγμα που πηγαίνει πότε δεξιά πότε αριστερά καμιά φορά πότε πάνω και πότε κάτω κ.ο.κ!!!**

Πως θα μάθω μαθηματικά;

(Σημείωμα προς τους μαθητές μου)

Για να υπάρξει το φαινόμενο της μάθησης θα πρέπει να υπάρχει διδασκαλία.
Διδασκαλία-μάθηση δεν είναι αυτοτελή φαινόμενα στο παιδαγωγικό έργο. Αυτά όχι μόνο εμφανίζονται συγχρόνως αλλά βρίσκονται και σε εξάρτηση.
Αυτός που διδάσκει μαθαίνει και αυτός που μαθαίνει διδάσκει(Οι μαθητές μου είναι και δάσκαλοί μου συγχρόνως).
Δεν μπορούμε να μάθουμε μαθηματικά διαβάζοντας μόνο άριστα βοηθήματα (σχολικά και άλλα)
Δεν διαβάζουμε μαθηματικά βιβλία όπως διαβάζουμε μια εφημερίδα ή ένα διασκεδαστικό περιοδικό.
Δεν μπορούμε να μάθουμε μαθηματικά παρακολουθώντας απλά διαλέξεις σε τάξεις σχολείων – φροντιστηρίων.
Χρειάζεται κόπος (πόνος),έντονη προσπάθεια, άφθονο πρόχειρο χαρτί, πολύς διαθέσιμος χρόνος και πάνω από όλα, όρεξη και θέληση για δουλειά.
Ποτέ δεν θα ξεχάσω τα λόγια ενός δασκάλου μου:
«Αν στην προσπάθεια σου να καταφέρεις μια άσκηση, αποτύχεις να την αποδείξεις, αλλά έχεις δείξει μια άλλη που δεν μπορούσες να λύσεις μέχρι χτες τότε αρχίζεις να *μ α θ α ί ν ε ι ς!!*»